Corrigé et barème – Loi géométrique : temps d'attente discret

Rappels de 1re sur les probabilités conditionnelles et les suites géométriques, rang du premier succès d'un schéma de Bernoulli et loi géométrique, probabilités P(X > k) et P(X ⩽ k) et seuils, espérance 1/p et simulation en Python, absence de mémoire.

Durée : 90 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths-complementaires Terminale

Exercice 1 – Rappels : probabilité conditionnelle et somme géométrique ★★ *(4 pts)*

a) Un arbre qui vit plus de trois ans vit aussi plus de deux ans : $B \subset A$, donc $A \cap B = B$. Ainsi $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}62}{0{,}80} = 0{,}775$: parmi les arbres qui vivent plus de deux ans, $77{,}5\,\%$ vivent plus de trois ans. (1)

b) $1 + 0{,}72 + \cdots + 0{,}72^{n-1}$ est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $0{,}72 \neq 1$: elle vaut $\dfrac{1 - 0{,}72^{n}}{1 - 0{,}72} = \dfrac{1 - 0{,}72^{n}}{0{,}28}$. Donc $S_n = 0{,}28 \times \dfrac{1 - 0{,}72^{n}}{0{,}28} = 1 - 0{,}72^{n}$. (1)

c) $S_5 = 1 - 0{,}72^{5} = 1 - 0{,}1934917632 = 0{,}8065082368 \approx 0{,}8065$. (1)

d) Comme $0 < 0{,}72 < 1$, $0{,}72^{n}$ tend vers 0, donc S_n tend vers 1. Si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}28)$, $P(X = k) = 0{,}72^{k-1} \times 0{,}28$ et $S_n = P(X = 1) + \cdots + P(X = n) = P(X \leqslant n)$. La limite 1 traduit que la somme de toutes les probabilités de la loi vaut 1. (1)

Repère — Événement inclus : l'intersection est le plus petit des deux. Somme de n termes : $(1 - q^{n})/(1 - q)$, et le facteur p se simplifie avec $1 - q$.

Exercice 2 – Candidatures de stage ★★ *(5 pts)*

a) Chaque candidature est une épreuve de Bernoulli de succès « réponse positive », de probabilité $p = 0{,}24$. Les candidatures sont identiques et indépendantes, et X est le rang du premier succès : X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}24)$. (1)

b) Deux refus puis une réponse positive : $P(X = 3) = 0{,}76^{2} \times 0{,}24 = 0{,}5776 \times 0{,}24 = 0{,}138624$. (1)

c) $X > 5$ signifie que les 5 premières candidatures sont refusées : $P(X > 5) = 0{,}76^{5} = 0{,}2535525376 \approx 0{,}2536$. Par le contraire, $P(X \leqslant 5) = 1 - 0{,}2535525376 \approx 0{,}7464$. (1)

d) $P(3 \leqslant X \leqslant 6) = P(X > 2) - P(X > 6) = 0{,}76^{2} - 0{,}76^{6} = 0{,}5776 - 0{,}192699928576 = 0{,}384900071424 \approx 0{,}3849$. (1)

e) On cherche le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}99$. $1 - 0{,}76^{n} \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}76^{n} \leqslant 0{,}01 \iff n \ln 0{,}76 \leqslant \ln 0{,}01 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}76}$, car $\ln 0{,}76 < 0$. Or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}76} \approx 16{,}78$. Contrôle : $0{,}76^{16} \approx 0{,}0124 > 0{,}01$ et $0{,}76^{17} \approx 0{,}0094 \leqslant 0{,}01$. Elle doit prévoir 17 candidatures. (1)

Repère — Tout se ramène à $P(X > k) = (1 - p)^{k}$: par le contraire, par une différence, ou par le logarithme pour un seuil, en contrôlant les deux entiers voisins.

Exercice 3 – Coffres d'un jeu vidéo ★★ *(4 pts)*

a) Chaque coffre est une épreuve de Bernoulli de succès « objet légendaire », de probabilité 0,02 ; les coffres sont identiques et indépendants, et X est le rang du premier succès : X suit $\mathcal{G}(0{,}02)$. Donc $E(X) = \dfrac{1}{0{,}02} = 50$: en moyenne, il faut ouvrir 50 coffres pour obtenir un objet légendaire. (1)

b) Le coût est $3X$; par linéarité de l'espérance, $E(3X) = 3E(X) = 3 \times 50 = 150$ pièces d'or en moyenne. (1)

c) `random()` renvoie un réel au hasard dans $[0\,;1[$; le test `random() >= 0.02` est vrai avec la probabilité 0,98 : il représente un coffre sans objet légendaire. Tant que c'est le cas, la boucle ajoute 1 au compteur k. Au premier coffre qui contient l'objet, la boucle s'arrête et la fonction renvoie k, le rang de ce coffre : c'est une réalisation de X. (1)

d) La moyenne de 10 000 réalisations est proche de l'espérance : environ 50. Ce n'est pas la valeur la plus probable : $P(X = k+1) = 0{,}98\,P(X = k)$, donc les probabilités diminuent et la valeur la plus probable est 1, avec $P(X = 1) = 0{,}02$. (1)

Repère — $\mathrm{E(X)} = 1/\mathrm{p}$ est un temps d'attente moyen, que la simulation retrouve ; la valeur la plus probable d'une loi géométrique est toujours 1.

Exercice 4 – Absence de mémoire ★★★ *(4 pts)*

a) Soit k un entier naturel. L'événement $\{X > k\}$ signifie que les k premières épreuves sont des échecs (pour $k = 0$, c'est l'événement certain). Les épreuves étant indépendantes et chacune de probabilité d'échec q, $P(X > k) = q \times q \times \cdots \times q = q^k$. (1)

b) Soit m et n deux entiers naturels. $P(X > m) = q^m \neq 0$. Si $X > m+n$, alors $X > m$: $\{X > m+n\} \subset \{X > m\}$, donc $\{X > m\} \cap \{X > m+n\} = \{X > m+n\}$. Ainsi $P_{X>m}(X > m+n) = \dfrac{P(X > m+n)}{P(X > m)} = \dfrac{q^{m+n}}{q^m} = q^n = P(X > n)$. (1)

c) Le rang T de la première nuit où l'alarme se déclenche suit $\mathcal{G}(0{,}015)$ (épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, rang du premier succès). On cherche $P_{T>60}(T > 90)$. Par absence de mémoire, $P_{T>60}(T > 90) = P(T > 30) = 0{,}985^{30} \approx 0{,}6355$. (1)

d) $\{Y > 6\} \subset \{Y > 4\}$, donc $P_{Y>4}(Y > 6) = \dfrac{P(Y > 6)}{P(Y > 4)} = \dfrac{2/8}{4/8} = \dfrac{1}{2}$. Or $P(Y > 2) = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$. Pour $m = 4$ et $n = 2$, $P_{Y>m}(Y > m+n) \neq P(Y > n)$: Y n'a pas la propriété d'absence de mémoire. (1)

Repère — Absence de mémoire : un quotient de deux puissances de q, grâce à l'inclusion. Pour la réfuter, un seul contre-exemple chiffré suffit.

Exercice 5 – Régler la difficulté d'un jeu ★★★ *(3 pts)*

a) X suit $\mathcal{G}(p)$ (essais identiques et indépendants, rang du premier succès), donc $P(X \leqslant 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (1-p)^3$. (1)

b) $1 - (1-p)^3 \geqslant 0{,}875 \iff (1-p)^3 \leqslant 0{,}125 = 0{,}5^3$. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc cela équivaut à $1 - p \leqslant 0{,}5$, soit $p \geqslant 0{,}5$. Les valeurs cherchées sont $p \in [0{,}5\,;1[$. (1)

c) $E(X) = \dfrac{1}{p} \geqslant 4 \iff p \leqslant \dfrac{1}{4} = 0{,}25$ (car $p > 0$). Les deux exigences demandent $p \geqslant 0{,}5$ et $p \leqslant 0{,}25$: c'est impossible. Un jeu où l'on gagne souvent en trois essais ne peut pas, en même temps, demander en moyenne quatre essais. (1)

Repère — Un paramètre inconnu se trouve en résolvant une inégalité sur $(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n}}$; l'espérance $1/\mathrm{p}$ diminue quand p augmente.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).