Limites de suites

Fiche méthode

(Maths complémentaires Terminale · Suites)

La démarche pour déterminer une limite

1. Je reconnais la forme de la suite : expression de n, puissances q^n, terme qui oscille, somme de termes géométriques.

2. Je calcule la limite de chaque morceau avec les limites de référence et la limite de q^n.

3. Si c'est une forme indéterminée, je factorise par le terme dominant (ou la plus grande base) ; si un terme oscille, j'encadre.

4. Je conclus en citant l'opération ou le théorème, puis j'interprète dans la situation (stabilisation, explosion, total fini).

Le réflexe — une limite se justifie par une règle nommée (« par somme », « par produit », « d'après le théorème des gendarmes ») ; dans un problème, on termine par une phrase qui interprète le résultat.

Cas 1 · Conjecturer puis justifier une limite

Réflexe — tableau de valeurs pour n = 10, 100, 1 000, puis limites de référence pour justifier.

Exemple. Questions types : « Conjecturer la limite », « Déterminer la limite ». Exemple : $u_n = 1 - \dfrac{4}{n^3}$ $(n \geqslant 1)$.

Calculatrice : $u_{10} = 0{,}996$; $u_{100} = 0{,}999\,996$: on conjecture $\lim u_n = 1$.

$n^3 \to +\infty$, donc $\dfrac{4}{n^3} \to 0$ et, par somme, $\lim u_n = 1$.

Attention — une suite bornée ou croissante n'a pas forcément de limite finie ou infinie : il faut justifier.

Cas 2 · Lever une forme indéterminée

Réflexe — je factorise en haut et en bas par le terme de plus haut degré, je simplifie, je conclus par quotient.

Exemple. Question type : « Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{6n^2 + n}{3n^2 - 4}$ ».

Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pour $n \geqslant 2$: $u_n = \dfrac{6 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{4}{n^2}}$.

Le numérateur tend vers 6, le dénominateur vers 3 : par quotient, $\lim u_n = 2$.

Attention — « $\infty - \infty = 0$ » et « $\infty / \infty = 1$ » sont faux.

Cas 3 · Puissances q^n et pourcentages

Réflexe — hausse de t % : $q = 1 + t/100 > 1$; baisse : $0 < q < 1$; je compare q à 1.

Exemple. Question type : « Une valeur baisse de 6 % par an : limite de $v_n = 1\,500 \times 0{,}94^n$? ».

$0 < 0{,}94 < 1$, donc $0{,}94^n \to 0$.

Par produit par 1 500, $\lim v_n = 0$: la valeur finit par devenir négligeable.

Attention — $1{,}01^n$ tend vers $+\infty$ même si la hausse est faible ; $q = 1$ donne une suite constante.

Cas 4 · Encadrer ou comparer

Réflexe — terme qui oscille : encadrement entre -1 et 1, puis gendarmes (limite finie) ou comparaison (limite infinie).

Exemple. Question type : « Encadrer $u_n = \dfrac{2n+\cos n}{n^2}$ $(n \geqslant 1)$ et en déduire sa limite ».

$-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$ donne $\dfrac{2n-1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2n+1}{n^2}$ (on divise par $n^2 > 0$).
$\dfrac{2n \pm 1}{n^2} = \dfrac{2}{n} \pm \dfrac{1}{n^2} \to 0$: d'après le théorème des gendarmes, $\lim u_n = 0$.

Attention — deux bornes de limites différentes ne permettent pas de conclure.

Cas 5 · Somme géométrique

Réflexe — premier terme, raison, nombre de termes ; formule ; puis q^(n+1) → 0 si 0 < q < 1.

Exemple. Question type : « Limite de $S_n = 1 + 0{,}36 + 0{,}36^2 + \cdots + 0{,}36^n$ ».

$S_n = \dfrac{1-0{,}36^{n+1}}{1-0{,}36} = \dfrac{1-0{,}36^{n+1}}{0{,}64}$.
$0 < 0{,}36 < 1$, donc $0{,}36^{n+1} \to 0$ et $\lim S_n = \dfrac{1}{0{,}64} = \dfrac{25}{16} = 1{,}562\,5$.

Attention — de q^0 à q^n il y a $n+1$ termes, d'où l'exposant $n+1$.

Cas 6 · Seuil

Réflexe — suite monotone ; calculatrice ou boucle while ; deux rangs voisins.

Exemple. Question type : « Plus petit n tel que $0{,}8^n < 0{,}05$ ».

$(0{,}8^n)$ est décroissante. Calculatrice : $0{,}8^{13} \approx 0{,}055$ et $0{,}8^{14} \approx 0{,}044$.
Le plus petit entier est $n = 14$.

Attention — la condition du while est le contraire de la condition cherchée.

Les pièges

- Diverger ne veut pas dire tendre vers l'infini : $(-1)^n$ diverge sans limite.
- Une forme indéterminée n'est pas un résultat : on transforme l'écriture.
- Une inégalité stricte devient large à la limite : $u_n < 5$ donne seulement $\ell \leq 5$.
- La suite q^n peut tendre vers 0 pendant que la somme $1 + q + \ldots + q^n$ tend vers $1/(1-q)$.
- Un seuil se vérifie sur les deux rangs qui l'encadrent.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).