

Corrigé et barème – Limites de suites

Convergence, divergence et comportement asymptotique des suites numériques (programme Maths complémentaires Terminale)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Limites immédiates

(4 pts)

- a) $\frac{5}{n} \rightarrow 0$ donc $\lim u_n = 8$. (1)
- b) $-1 < 0,45 < 1$ donc $\lim v_n = 0$. (1)
- c) $w_n = n(4 - n)$; $n \rightarrow +\infty$ et $4 - n \rightarrow -\infty$, donc $\lim w_n = -\infty$. (1)
- d) $1,06 > 1$ donc $1,06^n \rightarrow +\infty$ et $\lim t_n = +\infty$. (1)

Repère — Avant tout calcul, on identifie la suite de référence ou la raison q : la règle s'applique alors directement.

Exercice 2 – Formes indéterminées

(4 pts)

- a) Forme $\frac{\infty}{\infty}$; on factorise par n^2 : $a_n = \frac{9 - \frac{4}{n^2}}{3 + \frac{2}{n}} \rightarrow \frac{9}{3} = 3$. (1)
- b) $b_n = \frac{1}{n} \times \frac{6 + \frac{5}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}}$; le second facteur tend vers 6 et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, donc $\lim b_n = 0$. (1)
- c) $c_n = n \times \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{1}{n}}$; le quotient tend vers $\frac{1}{5}$ et $n \rightarrow +\infty$, donc $\lim c_n = +\infty$. (1)
- d) Forme $\infty - \infty$; par la quantité conjuguée, $d_n = \frac{(n+16)-(n+7)}{\sqrt{n+16} + \sqrt{n+7}} = \frac{9}{\sqrt{n+16} + \sqrt{n+7}} \rightarrow 0$. (1)

Le point clé — Une écriture indéterminée n'est pas une absence de limite : il faut d'abord transformer l'expression, puis conclure.

Exercice 3 – Abonnés d'une médiathèque

(4 pts)

- a) $u_1 = 0,65 \times 1\,800 + 840 = 1\,170 + 840 = 2\,010$; $u_2 = 0,65 \times 2\,010 + 840 = 1\,306,5 + 840 = 2\,146,5$. (1)
- b) $v_{n+1} = 0,65u_n + 840 - 2\,400 = 0,65u_n - 1\,560 = 0,65(u_n - 2\,400) = 0,65v_n$: suite géométrique de raison 0,65, de premier terme $v_0 = 1\,800 - 2\,400 = -600$. (1)
- c) $v_n = -600 \times 0,65^n$ donc $u_n = 2\,400 - 600 \times 0,65^n$; comme $0,65^n \rightarrow 0$, $\lim u_n = 2\,400$: le nombre d'abonnés se stabilise autour de 2 400, sans jamais l'atteindre. (1)
- d) $u_n > 2\,395 \iff 600 \times 0,65^n < 5 \iff 0,65^n < \frac{1}{120}$. Par le logarithme népérien, $n > \frac{\ln(1/120)}{\ln(0,65)} \approx 11,1$, donc $n = 12$. (1)

À retenir — Pour une suite arithmético-géométrique, tout découle du point fixe : suite auxiliaire, terme général, limite.

Exercice 4 – Suite définie par récurrence

(4 pts)

- a) $w_1 = \sqrt{2+15} = \sqrt{17} \approx 4,123$; $w_2 = \sqrt{2\sqrt{17}+15} = \sqrt{23,246\dots} \approx 4,821$. (1)
- b) Les termes sont positifs, donc on compare les carrés : $w_{n+1}^2 - w_n^2 = 2w_n + 15 - w_n^2 = -(w_n - 5)(w_n + 3)$. Comme $0 < w_n < 5$, ce produit est positif, donc $w_{n+1} > w_n$: la suite est croissante. (1)
- c) Elle est croissante et majorée par 5 : d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel L tel que $1 \leq L \leq 5$. (1)
- d) $f(x) = \sqrt{2x+15}$ est continue, donc $L = \sqrt{2L+15}$, soit $L^2 - 2L - 15 = 0$. Les racines sont -3 et 5 ; comme $L \geq 1$, on conclut $\lim w_n = 5$. (1)

Attention — Le théorème de la limite monotone prouve l'existence de la limite ; sa valeur s'obtient ensuite par l'équation $f(L) = L$.

Exercice 5 – Somme géométrique et seuil

(4 pts)

- a) Somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $0,32 \neq 1$ et de premier terme 1 : $S_n = \frac{1-0,32^{n+1}}{0,68}$. (1)
- b) $0,32^{n+1} \rightarrow 0$ car $-1 < 0,32 < 1$, donc $\lim S_n = \frac{1}{0,68} = \frac{25}{17} \approx 1,471$. (1)
- c) La suite est croissante, mais aussi majorée : $1 - 0,32^{n+1} < 1$ donne $S_n < \frac{1}{0,68}$. Croissante et majorée, elle converge (limite monotone) : une somme d'une infinité de termes positifs peut rester bornée quand ces termes décroissent géométriquement. (1)
- d) `def seuil() :`
 `n = 0`
 `s = 1`
 `q = 1`
 `while s <= 1.47 :`
 `n = n + 1`
 `q = 0.32 * q`
 `s = s + q`
 `return n` — la fonction renvoie 6 ($S_5 \approx 1,4690$ et $S_6 \approx 1,4701$). (1)

Erreur fréquente — Additionner indéfiniment des nombres positifs ne fait pas nécessairement tendre la somme vers l'infini.