Limites, continuité et TVI

Fiche méthode

(Maths complémentaires Terminale · Fonctions)

La démarche pour étudier une fonction aux bornes et résoudre f(x) = k

1. Je repère les bornes de l'ensemble de définition : $\pm\infty$ et les valeurs interdites.

2. Je calcule chaque limite avec les limites de référence et les opérations ; forme indéterminée : terme dominant.

3. J'interprète : limite finie en l'infini = asymptote horizontale, limite infinie en un réel = asymptote verticale.

4. Pour $f(x) = k$: continuité, stricte monotonie, valeurs aux bornes, corollaire du TVI, puis encadrement par balayage ou dichotomie.

Le réflexe — chaque limite se justifie par une règle nommée (« par somme », « par quotient ») et chaque solution par le théorème cité avec ses hypothèses : continuité, stricte monotonie, valeur k encadrée.

Cas 1 · Limite en l'infini, asymptote horizontale

Réflexe — forme indéterminée avec des polynômes : je factorise par le terme de plus haut degré, en haut et en bas.

Exemple. Questions types : « Déterminer la limite en $+\infty$; interpréter graphiquement ». Exemple : $\dfrac{5x^2-3x}{2x^2+7}$ en $+\infty$.

Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pour $x \neq 0$: $\dfrac{5x^2-3x}{2x^2+7} = \dfrac{x^2\left(5-\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{7}{x^2}\right)} = \dfrac{5-\frac{3}{x}}{2+\frac{7}{x^2}}$.
$\dfrac{3}{x} \to 0$ et $\dfrac{7}{x^2} \to 0$: par quotient, la limite vaut $\dfrac{5}{2}$.
La droite d'équation $y = 2{,}5$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

Attention — « $\infty/\infty = 1$ » est faux : on factorise avant de conclure.

Cas 2 · Limite en une valeur interdite

Réflexe — numérateur vers un réel non nul, signe du dénominateur de chaque côté, règle des signes.

Exemple. Questions types : « Déterminer les limites à gauche et à droite en a ; en déduire une asymptote ». Exemple : $k(x) = \dfrac{x-6}{x+2}$ en -2.

Le numérateur tend vers $-8 < 0$.
Si $x > -2$, $x+2 \to 0^+$: $\lim\limits_{x \to -2^+} k(x) = -\infty$. Si $x < -2$, $x+2 \to 0^-$: $\lim\limits_{x \to -2^-} k(x) = +\infty$.
La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale.

Attention — 1/x n'a pas de limite en 0 : on étudie toujours les deux côtés.

Cas 3 · Existence d'une solution (TVI)

Réflexe — continuité sur [a ; b] et k compris entre f(a) et f(b) : au moins une solution.

Exemple. Questions types : « Montrer que l'équation admet au moins une solution dans $[a\,;b]$ ». Exemple : $x^4 + x - 5 = 0$ sur $[1\,;2]$.

$\psi(x) = x^4 + x - 5$ est continue sur $[1\,;2]$ (polynôme).
$\psi(1) = -3 < 0$ et $\psi(2) = 13 > 0$: 0 est compris entre $\psi(1)$ et $\psi(2)$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\psi(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[1\,;2]$.

Attention — sans continuité (fonction en escalier), le TVI ne s'applique pas.

Cas 4 · Unique solution, nombre de solutions

Réflexe — continue + strictement monotone + k entre les valeurs aux bornes : corollaire du TVI, sur chaque flèche du tableau.

Exemple. Questions types : « Montrer que l'équation admet une unique solution α ; en donner un encadrement ». Exemple : $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$ sur $[0\,;+\infty[$.

p est continue (polynôme). $p'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1) \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$, nul seulement en 0 : p est strictement croissante.

$p(0) = -4 < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ (terme dominant $2x^3$).

D'après le corollaire du TVI, $p(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \geqslant 0$. Comme $p(0{,}91) \approx -0{,}009$ et $p(0{,}92) \approx 0{,}097$, on a $0{,}91 < \alpha < 0{,}92$.

Attention — le TVI seul donne l'existence ; l'unicité vient de la stricte monotonie.

Cas 5 · Encadrer par dichotomie

Réflexe — milieu m ; si f(a) et f(m) sont de signes contraires, b = m, sinon a = m.

Exemple. Questions types : « Donner l'intervalle après trois étapes de dichotomie ». Exemple : $x^3 - 4 = 0$ sur $[1\,;2]$.

On pose $f(x) = x^3 - 4$, continue et strictement croissante : $f(1) = -3 < 0$ et $f(2) = 4 > 0$.

$m = 1{,}5$: $f(1{,}5) = -0{,}625 < 0$, même signe que $f(a)$: $[1{,}5\,;2]$. $m = 1{,}75$: $f(1{,}75) = 1{,}359375 > 0$: $[1{,}5\,;1{,}75]$.

$m = 1{,}625$: $f(1{,}625) = 0{,}291015625 > 0$: $[1{,}5\,;1{,}625]$, d'amplitude $\dfrac{1}{2^3} = 0{,}125$.

Attention — « si f(m) > 0 alors b = m » n'est juste que pour une fonction croissante.

Les pièges

- ∞/∞, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$ et $0/0$ sont des formes indéterminées, pas des résultats.
- Le terme dominant ne sert qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$, jamais en un réel.
- Une valeur interdite ne donne pas toujours une asymptote verticale : si le numérateur tend aussi vers 0, on simplifie.
- Une courbe peut couper son asymptote horizontale.
- Existence (TVI) n'est pas unicité : il faut la stricte monotonie.
- Un encadrement se prouve par deux images de signes contraires.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).