Limites, continuité et TVI

Fiche tableaux : les résultats à connaître
(Maths complémentaires Terminale)

Limites de référence

Fonction	**en** $+\infty$	**en** $-\infty$	**en** 0
x^n $(n \geqslant 1)$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair	0
$\dfrac{1}{x}$	0	0	$+\infty$ en 0^+, $-\infty$ en 0^-
$\dfrac{1}{x^2}$	0	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	$+\infty$	non définie	0
e^x	$+\infty$	0	1

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6-\dfrac{1}{x^2}\right)=6$.

Somme

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**FI**

Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+x)=-\infty$ (« $0+(-\infty)$ »). Forme indéterminée en $+\infty$: $x^3-x^2=x^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\to+\infty$.

Produit

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(fg)$
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (règle des signes)
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (règle des signes)
0	$\pm\infty$	**FI**

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3\sqrt{x})=-\infty$ (« $(-3)\times(+\infty)$ »).

Quotient

$\lim f$	$\lim g$	$\lim \dfrac{f}{g}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$ (règle des signes)
$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0^+ ou 0^-	$\pm\infty$ (règle des signes)
$\pm\infty$	$\pm\infty$	**FI**
0	0	**FI**

Exemple : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-1}{x} = -\infty$ (« $\dfrac{-1}{0^+}$ »). Forme indéterminée en $+\infty$: $\dfrac{4x+1}{x} = 4 + \dfrac{1}{x} \to 4$.

Asymptotes et position

Si…	**alors…**
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$	la droite $y = \ell$ est asymptote horizontale
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ (d'un côté au moins)	la droite $x = a$ est asymptote verticale
$f(x) - \ell > 0$	la courbe est au-dessus de $y = \ell$
$f(x) - \ell < 0$	la courbe est en dessous de $y = \ell$

Exemple : $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x-2}$ a pour asymptotes $y = 1$ et $x = 2$; $f(x) - 1 = \dfrac{3}{x-2}$, donc la courbe est au-dessus de $y = 1$ pour $x > 2$.

Continuité, TVI et réciproque

Si f est…	**et si…**	**alors…**
continue sur $[a\,;b]$	k est entre $f(a)$ et $f(b)$	$f(x) = k$ a au moins une solution dans $[a\,;b]$
continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$	k est entre $f(a)$ et $f(b)$	$f(x) = k$ a une unique solution dans $[a\,;b]$
continue et strictement monotone sur un intervalle I	—	f a une fonction réciproque f^{-1}, de même sens de variation
dérivable sur I	—	f est continue sur I

Dichotomie : après n étapes sur $[a\,;b]$, amplitude $\dfrac{b-a}{2^n}$. Exemple : $f(x) = x^3 + x^2 + x$ est continue, $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 3$: l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution dans $[0\,;1]$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).