

Devoir surveillé – Fonctions : limites, continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Limites de fonctions, asymptotes, continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires et résolution approchée d'équations

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Calculs de limites

(4 pts)

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^4 - 9x^3 + 1)$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x-5}{4x^2-x}$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2-3}{6-4x^2}$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+e^x}{2-e^x}$.

Exercice 2 – Asymptotes d'une fonction rationnelle

(4 pts)

- Soit $r(x) = \frac{3x-2}{5-x}$. Donner l'ensemble de définition de r et ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Déterminer les limites de r en 5, à gauche et à droite.
- En déduire les équations des asymptotes à la courbe de r .
- Montrer que $r(x) + 3 = \frac{13}{5-x}$ et en déduire la position de la courbe par rapport à son asymptote horizontale.

Exercice 3 – Tableau de variations et nombre de solutions

(4 pts)

- Une fonction f continue sur $[-3; 5]$ a le tableau de variations suivant.

x	-3		0		4		5
$f(x)$	-2	$\nearrow$	6	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = 0$ sur $[-3; 5]$.

- Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = 2$.
- Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = 7$.
- Un élève affirme que $f(x) = 4$ a trois solutions. Expliquer son erreur et donner le bon nombre.

Exercice 4 – Théorème des valeurs intermédiaires

(4 pts)

- Soit $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Étudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$.
- Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- Montrer que $\alpha = \sqrt{3} - 1$.

Exercice 5 – Dichotomie en Python*(4 pts)*

a) On considère le programme suivant.

```
def f(x):  
    return x**2 - 7  
  
def dichotomie(f, a, b, e):  
    while b - a > e:  
        m = (a + b) / 2  
        if f(a) * f(m) <= 0:  
            b = m  
        else:  
            a = m  
    return a, b
```

Justifier que l'équation $x^2 = 7$ admet une unique solution dans $[2; 3]$.

- b) Pour l'appel `dichotomie(f, 2, 3, 0.001)`, donner les valeurs de a et b après trois passages dans la boucle.
- c) Combien de passages dans la boucle cet appel effectue-t-il ?
- d) Un élève remplace le test par `if f(m) > 0: b = m`, sinon `a = m`. Expliquer pourquoi sa version convient pour f mais pas pour $g(x) = 7 - x^2$ sur $[2; 3]$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).