

Corrigé et barème – Fonctions : limites, continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Limites de fonctions, asymptotes, continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires et résolution approchée d'équations

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Calculs de limites

(4 pts)

- a) $2x^4 - 9x^3 + 1 = x^4 \left(2 - \frac{9}{x} + \frac{1}{x^4}\right)$, parenthèse $\rightarrow 2$, $x^4 \rightarrow +\infty$: limite $+\infty$. (1)
- b) $\frac{8x-5}{4x^2-x} = \frac{1}{x} \times \frac{8-\frac{5}{x}}{4-\frac{1}{x}}$: 0×2 , limite 0. (1)
- c) $\frac{9-\frac{3}{x^2}}{\frac{6}{x^2}-4} \rightarrow \frac{9}{-4}$: limite $-\frac{9}{4}$. (1)
- d) $e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$: numérateur $\rightarrow 3$, dénominateur $\rightarrow 2$, limite $\frac{3}{2}$ (pas d'indétermination). (1)

Erreur fréquente — Conclure « $\frac{\infty}{\infty} = 1$ » : on factorise d'abord par le terme de plus haut degré, en surveillant les signes.

Exercice 2 – Asymptotes d'une fonction rationnelle

(4 pts)

- a) $\mathbb{R} \setminus \{5\}$; $r(x) = \frac{3-\frac{2}{x}}{\frac{5}{x}-1} \rightarrow \frac{3}{-1}$: limite -3 en $+\infty$ et en $-\infty$. (1)
- b) Numérateur $\rightarrow 13 > 0$; $5-x \rightarrow 0^+$ si $x < 5$, 0^- si $x > 5$: $\lim_{x \rightarrow 5^-} r(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} r(x) = -\infty$. (1)
- c) Asymptote horizontale $y = -3$, asymptote verticale $x = 5$. (1)
- d) $r(x) + 3 = \frac{3x-2+15-3x}{5-x} = \frac{13}{5-x}$: courbe au-dessus de $y = -3$ sur $] -\infty; 5[$, en dessous sur $]5; +\infty[$. (1)

À retenir — En un point où le dénominateur s'annule, c'est le signe du dénominateur de chaque côté qui fixe le signe de l'infini.

Exercice 3 – Tableau de variations et nombre de solutions

(4 pts)

- a) Sur $[-3; 0]$, f continue strictement croissante de -2 à 6 : une solution ; sur $[0; 5]$, $f(x) \geq 1 > 0$: aucune. Une solution. (1)
- b) $2 \in [-2; 6]$, $2 \in [1; 6]$, $2 \in [1; 3]$: une solution sur chacun des trois intervalles (distinctes car $f(0), f(4) \neq 2$). Trois solutions. (1)
- c) Le maximum de f est $6 < 7$: aucune solution. (1)
- d) Sur $[4; 5]$, $f(x) \leq 3 < 4$: pas de solution sur ce morceau. Une solution sur $[-3; 0]$ et une sur $[0; 4]$: deux solutions. (1)

Repère — On applique le corollaire du TVI intervalle par intervalle, en vérifiant à chaque fois que k est bien dans l'ensemble des valeurs prises.

Exercice 4 – Théorème des valeurs intermédiaires

(4 pts)

- a) $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$, nul seulement en 0 : f strictement croissante. (1)
- b) f continue (polynôme), strictement croissante, $f(0) = -2 < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (terme x^3) : par le corollaire du TVI, unique $\alpha \geq 0$. (1)
- c) $f(0,73) \approx -0,012 < 0$ et $f(0,74) \approx 0,048 > 0$: $0,73 < \alpha < 0,74$. (1)
- d) Avec $x = \sqrt{3} - 1$: $x^2 = 4 - 2\sqrt{3}$, $x^3 = 6\sqrt{3} - 10$, donc $f(x) = 6\sqrt{3} - 10 + 12 - 6\sqrt{3} - 2 = 0$; comme $\sqrt{3} - 1 \geq 0$, l'unicité donne $\alpha = \sqrt{3} - 1$. (1)

Le point clé — Sans la stricte monotonie, le TVI ne donne pas l'unicité ; c'est elle qui permet d'identifier α à la valeur trouvée.

Exercice 5 – Dichotomie en Python

(4 pts)

- a) f continue, $f'(x) = 2x > 0$ sur $[2; 3]$ donc strictement croissante ; $f(2) = -3 < 0 < 2 = f(3)$: unique solution ($\sqrt{7}$) par le corollaire du TVI. (1)
- b) $f(2,5) = -0,75$: $[2,5; 3]$; $f(2,75) = 0,5625$: $[2,5; 2,75]$; $f(2,625) \approx -0,109$: $a = 2,625$, $b = 2,75$. (1)
- c) Il faut $\frac{1}{2^n} \leq 0,001$, soit $2^n \geq 1\,000$: $2^9 = 512$, $2^{10} = 1\,024$, donc 10 passages. (1)
- d) Pour f croissante, $f(m) > 0$ signifie $m > \sqrt{7}$: garder $[a; m]$ est juste. Pour g décroissante, $g(m) > 0$ signifie $m < \sqrt{7}$: le programme garde $[a; m]$ qui ne contient pas la solution (il converge vers 2). (1)

Attention — Le test « $f(a) \times f(m) \leq 0$ » fonctionne quel que soit le sens de variation ; un test sur le seul signe de $f(m)$ suppose f croissante.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).