Fonction logarithme népérien

Fiche méthode

(Maths complémentaires Terminale · Analyse · Fonctions)

La démarche face à une question avec ln ou exp

1. Je repère où est l'inconnue : en exposant (j'appliquerai ln), sous un ln (j'appliquerai exp), dans une puissance q^n (seuil), ou dans une fonction à étudier.

2. J'écris les conditions : tout ce qui est sous un ln doit être strictement positif.

3. Je transforme avec les propriétés algébriques pour obtenir $\ln A = \ln B$, $\ln A = k$ ou $e^A = k$.

4. Je conclus en citant la stricte croissance de ln ou de exp, je trie les solutions et je donne l'arrondi demandé.

Le réflexe — chaque équivalence se justifie par une propriété nommée (« ln est strictement croissante », « ln(ab) = ln a + ln b ») : un résultat juste sans justification ne rapporte pas tous les points.

Cas 1 · Comparer deux exponentielles

Réflexe — un seul e^A de chaque côté, puis A = B ou A < B ; e^x > 0 ne change aucun signe.

Exemple. Questions types : « Résoudre $e^A \leqslant e^B$ », « Simplifier ». Exemple : résoudre $e^{x^2+1} > e^{2x+4}$.

La fonction exponentielle est strictement croissante : $e^{x^2+1} > e^{2x+4} \iff x^2+1 > 2x+4$.
$x^2 - 2x - 3 > 0 \iff (x-3)(x+1) > 0$.
Un trinôme est positif à l'extérieur de ses racines : $\mathcal{S} =]-\infty\,;-1[\cup]3\,;+\infty[$.

Attention — e^(a+b) n'est pas e^a + e^b ; e^(2x) = (e^x)², pas 2e^x.

Cas 2 · Passer de l'exponentielle au logarithme

Réflexe — e^A = k avec k > 0 donne A = ln k ; ln A = k donne A = e^k.

Exemple. Questions types : « Résoudre $e^{ax+b} = k$ », « Valeur exacte, puis approchée ». Exemple : résoudre $e^{3x-1} = 8$.

$8 > 0$, donc $e^{3x-1} = 8 \iff 3x - 1 = \ln 8$.
$x = \dfrac{1+\ln 8}{3} = \dfrac{1+3\ln 2}{3}$.
Valeur approchée : $x \approx 1{,}026$. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1+3\ln 2}{3}\right\}$.

Attention — si k ≤ 0, e^A = k n'a pas de solution : ln k n'existe pas.

Cas 3 · Transformer une écriture

Réflexe — facteurs premiers, puis produit → somme, quotient → différence, puissance → coefficient.

Exemple. Questions types : « Exprimer en fonction de ln 2 », « Écrire sous la forme ln k ». Exemple : $A = \ln 24 - \ln 3 + \dfrac{1}{2}\ln 4$.

$\ln 24 - \ln 3 = \ln \dfrac{24}{3} = \ln 8 = 3\ln 2$.
$\dfrac{1}{2}\ln 4 = \ln \sqrt{4} = \ln 2$.
Donc $A = 3\ln 2 + \ln 2 = 4\ln 2$ (soit $\ln 16$).

Attention — aucune formule pour ln(a + b) ; ln(x²) = 2 ln x seulement si x > 0.

Cas 4 · Étudier une fonction avec ln

Réflexe — domaine, dérivée avec 1/x au même dénominateur, signe du numérateur, tableau avec limites.

Exemple. Questions types : « Calculer $f'(x)$ », « Dresser le tableau de variations », « En déduire le minimum ». Exemple : $f(x) = x^2 - 2\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

$f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2(x^2-1)}{x} = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$.
Sur $]0\,;+\infty[$, $x > 0$ et $x+1 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x-1$.
f décroît sur $]0\,;1]$, croît sur $[1\,;+\infty[$; minimum $f(1) = 1$. En 0^+, $-2\ln x \to +\infty$, donc $f(x) \to +\infty$.

Attention — « $\ln 0 = -\infty$ » ne s'écrit pas : on parle de limite en 0^+.

Cas 5 · Résoudre une équation ou une inéquation

Réflexe — conditions, puis ln A = ln B ou ln A = k, résolution, tri des solutions.

Exemple. Questions types : « Résoudre dans $\mathbb{R}$ » avec une somme de logarithmes. Exemple : $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln 8$.

Conditions : $x+1 > 0$ et $x-1 > 0$, soit $x > 1$.
Sur $]1\,;+\infty[$: $\ln\big((x+1)(x-1)\big) = \ln 8 \iff x^2 - 1 = 8 \iff x^2 = 9$.
$x = 3$ ou $x = -3$; seul 3 vérifie $x > 1$. $\mathcal{S} = \{3\}$.

Attention — ln u < k donne $0 < u < e^k$: ne pas oublier $u > 0$.

Cas 6 · Déterminer un seuil

Réflexe — isoler q^n, appliquer ln, diviser par ln q selon son signe, prendre le plus petit entier, contrôler.

Exemple. Questions types : « À partir de quel rang… », « Au bout de combien d'années… ». Exemple : plus petit n tel que $1{,}12^n > 4$.

ln est strictement croissante : $1{,}12^n > 4 \iff n \ln 1{,}12 > \ln 4$.
$\ln 1{,}12 > 0$ (car $1{,}12 > 1$) : $n > \dfrac{\ln 4}{\ln 1{,}12} \approx 12{,}23$.
Donc $n = 13$. Contrôle : $1{,}12^{12} \approx 3{,}90$ et $1{,}12^{13} \approx 4{,}36$.

Attention — si $0 < q < 1$, $\ln q < 0$: le sens de l'inégalité change.

Les pièges

- ln x n'existe que pour $x > 0$, mais ln x peut être négatif (pour $0 < x < 1$).
- Une somme de logarithmes est le logarithme d'un produit, jamais celui d'une somme.
- $e^x = -2$ n'a pas de solution : on n'écrit jamais $\ln(-2)$.
- ln u < k impose aussi $u > 0$: l'ensemble des solutions est borné à gauche.
- Diviser par ln q avec $0 < q < 1$ change le sens de l'inégalité.
- Un seuil se donne par un entier : $n > 14{,}2$ donne $n = 15$, et on contrôle les rangs 14 et 15.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).