Fonction logarithme népérien

Fiche tableaux : les propriétés à connaître
(Maths complémentaires Terminale)

Définition et valeurs à connaître

Pour $x>0$, y réel	$\ln 1$	$\ln e$	$e^{\ln x}$	$\ln(e^y)$
$y=\ln x \iff x=e^y$	0	1	x	y

Exemple : $\ln\left(e^{-0{,}7}\right)=-0{,}7$ et $e^x=2{,}5 \iff x=\ln 2{,}5$.

Rappels : l'exponentielle

Signe	**Produit**	**Inverse**	**Puissance**	**Comparaison**
$e^x>0$	$e^{a+b}=e^a e^b$	$e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$	$(e^a)^n=e^{na}$	$e^a<e^b \iff a<b$

Exemple : $e^{2x}\times e^{3-x}=e^{x+3}$.

Propriétés algébriques ($a>0$, $b>0$, n entier)

Produit	**Inverse**	**Quotient**	**Puissance**	**Racine**
$\ln(ab)=\ln a+\ln b$	$\ln\dfrac{1}{a}=-\ln a$	$\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$	$\ln(a^n)=n\ln a$	$\ln\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\ln a$

Exemple : $\ln 75=\ln\left(3\times 5^2\right)=\ln 3+2\ln 5$.

Dérivée, variations, limites

Dérivée	**Variations**	**Signe**	**En 0^+**	**En $+\infty$**
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	strictement croissante	$\ln x<0 \iff 0<x<1$	$-\infty$	$+\infty$

Tangente en 1 : $y=x-1$, et $\ln x \leqslant x-1$. Exemple : $(5\ln x)'=\dfrac{5}{x}$.

Équations et inéquations

Écriture	**Équivalent**	**Condition**
$\ln u=\ln v$; $\ln u<\ln v$	$u=v$; $u<v$	$u>0, v>0$
$\ln u=k$; $\ln u<k$	$u=e^k$; $0<u<e^k$	aucune sur k
$e^u=k$; $e^u<k$	$u=\ln k$; $u<\ln k$	$k>0$

Exemple : $\ln(x+2)<1 \iff 0<x+2<e \iff -2<x<e-2$.

Seuils avec $\ln(q^n)=n\ln q$

Cas	**Signe de $\ln q$**	$q^n>s$	$q^n<s$
$q>1$	positif	$n>\dfrac{\ln s}{\ln q}$	$n<\dfrac{\ln s}{\ln q}$
$0<q<1$	négatif	$n<\dfrac{\ln s}{\ln q}$	$n>\dfrac{\ln s}{\ln q}$

Doublement à $t\,\%$: $n \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)}$. Demi-vie de $e^{-\lambda t}$: $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$. Exemple : $0{,}4^n < 0{,}01$ dès que $n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}4} \approx 5{,}03$, soit $n \geqslant 6$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).