

Devoir surveillé – Fonction logarithme népérien

Définition comme réciproque de l'exponentielle, propriétés algébriques, dérivée, variations, limites et résolution d'équations et d'inéquations

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Propriétés algébriques

(4 pts)

- a) Exprimer $\ln 200$ en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.
- b) Simplifier $A = 3 \ln(e^2) - \ln \frac{1}{e}$.
- c) Montrer que $\ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(\sqrt{2} - 1) = 0$.
- d) Écrire $B = 2 \ln 3 - \ln 6 + \ln 4$ sous la forme $\ln k$, avec k entier.

Exercice 2 – Équations

(4 pts)

- a) Résoudre $\ln(3x) = 4$ (valeur exacte et valeur approchée au centième).
- b) Résoudre $e^{-0,5x} = 0,45$ (valeur exacte et valeur approchée à 10^{-3}).
- c) Résoudre $\ln(2x - 1) = \ln(x + 6)$.
- d) Un élève résout $\ln(x - 3) = -1$ et trouve $x = 3 - \frac{1}{e}$. Expliquer son erreur et donner la bonne solution.

Exercice 3 – Inéquations et seuils

(4 pts)

- a) Résoudre $\ln x > -0,5$.
- b) Résoudre $\ln(4 - x) \geq \ln(2x + 1)$.
- c) Déterminer le plus petit entier n tel que $1,015^n > 1,2$.
- d) Déterminer le plus petit entier n tel que $0,93^n \leq 0,25$.

Exercice 4 – Étude de $f(x) = 4 \ln x - x$

(4 pts)

- a) Déterminer la limite de f en 0 et montrer que $f'(x) = \frac{4-x}{x}$ pour $x > 0$.
- b) Dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.
- c) Donner la valeur exacte du maximum de f , puis une valeur approchée au millièm.
- d) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Exercice 5 – Datation au carbone 14**(4 pts)**

- a) Dans un organisme mort, la proportion de carbone 14 restante au bout de t années est $p(t) = e^{-\lambda t}$.
La demi-vie du carbone 14 est de 5 730 ans. Montrer que $\lambda = \frac{\ln 2}{5\,730}$ et en donner une valeur approchée.
- b) Quelle proportion de carbone 14 reste-t-il au bout de 2 000 ans (en %, au dixième) ?
- c) Un os ne contient plus que 37 % de son carbone 14 initial. Estimer son âge, à l'année près.
- d) Montrer qu'après n demi-vies la proportion restante est $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, puis déterminer combien de demi-vies il faut pour descendre sous 1 %.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).