

Corrigé et barème – Fonction logarithme népérien

Définition comme réciproque de l'exponentielle, propriétés algébriques, dérivée, variations, limites et résolution d'équations et d'inéquations

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Propriétés algébriques

(4 pts)

- a) $200 = 2^3 \times 5^2$ donc $\ln 200 = 3 \ln 2 + 2 \ln 5$. (1)
- b) $3 \ln(e^2) = 6$ et $\ln \frac{1}{e} = -1$, donc $A = 6 + 1 = 7$. (1)
- c) Somme $= \ln((\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)) = \ln(2 - 1) = \ln 1 = 0$. (1)
- d) $B = \ln 9 - \ln 6 + \ln 4 = \ln \frac{9 \times 4}{6} = \ln 6$. (1)

À retenir — On décompose en facteurs premiers puis on applique produit, quotient et puissance : il n'existe aucune formule pour $\ln(a + b)$.

Exercice 2 – Équations

(4 pts)

- a) $x > 0$; $3x = e^4$, donc $x = \frac{e^4}{3} \approx 18,20$. (1)
- b) $-0,5x = \ln 0,45$, donc $x = -2 \ln 0,45 \approx 1,597$. (1)
- c) Condition $x > \frac{1}{2}$; $2x - 1 = x + 6$ donne $x = 7$, qui convient : $S = \{7\}$. (1)
- d) $\ln A = -1$ donne $A = e^{-1}$, pas $A = -e^{-1}$; de plus $3 - \frac{1}{e} < 3$ rend $\ln(x - 3)$ indéfini. Bonne solution : $x = 3 + e^{-1} \approx 3,368$. (1)

Erreur fréquente — Toujours écrire la condition d'existence avant de résoudre : une valeur qui rend l'argument du logarithme négatif est à rejeter.

Exercice 3 – Inéquations et seuils

(4 pts)

- a) $x > e^{-0,5}$: $S =]e^{-0,5} ; +\infty[$, avec $e^{-0,5} \approx 0,607$. (1)
- b) Conditions $-\frac{1}{2} < x < 4$; $4 - x \geq 2x + 1 \Leftrightarrow x \leq 1$: $S =]-\frac{1}{2} ; 1]$. (1)
- c) $n > \frac{\ln 1,2}{\ln 1,015} \approx 12,25$ ($\ln 1,015 > 0$), donc $n = 13$. (1)
- d) $n \ln 0,93 \leq \ln 0,25$ et $\ln 0,93 < 0$: $n \geq \frac{\ln 0,25}{\ln 0,93} \approx 19,10$, donc $n = 20$. (1)

Attention — $\ln 0,93$ est négatif : diviser par ce nombre inverse le sens de l'inégalité, sinon on trouve un seuil absurde.

Exercice 4 – Étude de $f(x) = 4 \ln x - x$

(4 pts)

- a) $4 \ln x \rightarrow -\infty$ et $-x \rightarrow 0$: $f \rightarrow -\infty$ en 0. $f'(x) = \frac{4}{x} - 1 = \frac{4-x}{x}$. (1)
- b) $x > 0$: signe de $4 - x$; f croissante sur $]0 ; 4]$, décroissante sur $[4 ; +\infty[$. (1)
- c) $f(4) = 4 \ln 4 - 4 = 8 \ln 2 - 4 \approx 1,545$. (1)
- d) $f(1) = -1$, $f'(1) = 3$: $y = 3(x - 1) - 1$, soit $y = 3x - 4$. (1)

Le point clé — Sur $]0 ; +\infty[$, le dénominateur x est positif : le signe de la dérivée est celui du numérateur.

Exercice 5 – Datation au carbone 14**(4 pts)**

a) $p(5\,730) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -5\,730\lambda = -\ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{5\,730} \approx 1,21 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}. (1)$

b) $p(2\,000) = e^{-2\,000\lambda} \approx e^{-0,242} \approx 0,785$, soit 78,5 %. (1)

c) $e^{-\lambda t} = 0,37 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 0,37}{\lambda} \approx 8\,219 \text{ ans}. (1)$

d) $p(5\,730n) = e^{-n \ln 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$; $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,01 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 100}{\ln 2} \approx 6,64 : 7$ demi-vies, soit 40 110 ans. (1)

Repère — Une décroissance exponentielle a une demi-vie constante : $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$, quel que soit l'instant de départ.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).