

Corrigé et barème – Fonction exponentielle

Définition, propriétés algébriques et applications de la fonction exponentielle (programme Maths complémentaires Terminale)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Calculs et équations

(4 pts)

- a) Numérateur $e^{7-4} = e^3$, dénominateur e^6 : le quotient vaut $e^{3-6} = e^{-3}$. (1)
- b) $4x + 1 = x - 5$ donc $3x = -6$ et $x = -2$; $S = \{-2\}$. (1)
- c) $x^2 = 5x - 6$ donc $x^2 - 5x + 6 = 0$, $\Delta = 1$: $x = 2$ ou $x = 3$; $S = \{2; 3\}$. (1)
- d) $e^x(e^x - 3) = 0$ et $e^x > 0$ donc $e^x = 3$, soit $x = \ln 3 \approx 1,10$; $S = \{\ln 3\}$. (1)

Erreur fréquente — Une exponentielle ne s'annule jamais : dans un produit du type $e^x \times A = 0$, seul le facteur A peut être nul.

Exercice 2 – Étude de la fonction $(2x + 1)e^{-x}$

(4 pts)

- a) $f'(x) = 2e^{-x} - (2x + 1)e^{-x} = (1 - 2x)e^{-x}$. (1)
- b) $e^{-x} > 0$ donc f' a le signe de $1 - 2x$: f croît sur $]-\infty; 0,5]$ puis décroît ; maximum $f(0,5) = 2e^{-0,5} \approx 1,21$. (1)
- c) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$ donc la tangente a pour équation $y = x + 1$. (1)
- d) $f''(x) = -2e^{-x} - (1 - 2x)e^{-x} = (2x - 3)e^{-x}$: concave sur $]-\infty; 1,5]$, convexe ensuite, point d'inflexion en $x = 1,5$. (1)

Le point clé — On factorise toujours la dérivée par l'exponentielle : comme elle est strictement positive, le signe ne dépend que du facteur polynomial.

Exercice 3 – Dépollution d'un bassin

(4 pts)

- a) $C(0) = 18$ mg/L et $C(4) = 18e^{-0,88} \approx 18 \times 0,4148 \approx 7,47$ mg/L. (1)
- b) $C'(t) = -3,96e^{-0,22t} < 0$ donc C décroît ; $e^{-0,22T} = 0,5$ donne $T = \frac{\ln 2}{0,22} \approx 3,15$ jours. (1)
- c) $18e^{-0,22t} < 1 \iff e^{-0,22t} < \frac{1}{18}$ donc $t > \frac{\ln 18}{0,22} \approx 13,14$: à partir du 14^e jour. (1)
- d) Coefficient journalier $e^{-0,22} \approx 0,8025$, soit une baisse d'environ 19,75 % par jour. (1)

Attention — Le coefficient $-0,22$ n'est pas un taux : le taux d'évolution journalier vaut $e^{-0,22} - 1$, soit environ $-19,75$ %.

Exercice 4 – Parc de véhicules électriques

(4 pts)

- a) $v_{n+1} = 1\,500 e^{0,09n} \times e^{0,09} = v_n \times e^{0,09}$: suite géométrique de raison $e^{0,09} \approx 1,0942$, de premier terme 1 500. (1)
- b) Taux annuel $= e^{0,09} - 1 \approx 0,0942$, soit environ +9,42 % par an. (1)
- c) $v_{10} = 1\,500 e^{0,9} \approx 1\,500 \times 2,4596 \approx 3\,689$ véhicules. (1)
- d) $e^{0,09n} \geq \frac{10}{3}$ donne $n \geq \frac{\ln(10/3)}{0,09} \approx 13,38$, donc $n = 14$: le seuil est atteint en 2040. (1)

Repère — Passer du modèle continu $C e^{at}$ à la suite v_n revient toujours à lire une suite géométrique de raison e^a .

Exercice 5 – Choix d'un modèle et esprit critique*(4 pts)*

- a) $\frac{3,1}{2,4} \approx 1,29$; $\frac{4,0}{3,1} \approx 1,29$; $\frac{5,3}{4,0} \approx 1,33$; $\frac{6,8}{5,3} \approx 1,28$: quotients quasi constants, $q \approx 1,29$. (1)
- b) $C = f(0) = 2,4$ et $a = \ln 1,29 \approx 0,2546$, d'où $f(t) = 2,4 e^{0,2546t}$. (1)
- c) 2033 correspond à $t = 7$: $f(7) = 2,4 e^{1,7825} \approx 2,4 \times 5,945 \approx 14,3$ millions d'euros. (1)
- d) Les différences successives valent 0,7 ; 0,9 ; 1,3 ; 1,5 : elles augmentent au lieu d'être constantes, donc l'évolution n'est pas affine. Le modèle du stagiaire sous-estimerait fortement les valeurs futures (il donnerait 10,1 en 2033). (1)

À retenir — Différences constantes signifie modèle affine, quotients constants signifie modèle exponentiel : c'est le premier test à faire devant un tableau de valeurs.