Équations différentielles

Fiche méthode

(Maths complémentaires Terminale · Analyse · Équations différentielles)

La démarche pour résoudre une équation différentielle

1. J'écris l'équation sous la forme $y' = ay + b$ et je lis a et b (en développant si besoin).

2. Je cherche la solution constante en résolvant $ac + b = 0$ (si $b = 0$, c'est 0).

3. J'écris toutes les solutions $x \mapsto Ce^{ax} + c$, « où C est un réel quelconque ».

4. J'utilise la condition initiale pour trouver C, puis je vérifie la valeur en x_0 et j'étudie le comportement (signe de aC, limite).

Le réflexe — une solution générale sans la constante C, ou une constante ajoutée égale à b au lieu de −b/a, est la faute la plus fréquente : la solution constante se retrouve toujours en résolvant ac + b = 0.

Cas 1 · Dériver et isoler une exponentielle

Réflexe — (Cˆ(ax+b))′ = aCˆ(ax+b) ; pour isoler t, je divise par C, j'applique ln, je divise par a (sens changé si a < 0).

Exemple. Questions types : « Étudier le sens de variation », « Résoudre $f(t) = k$ ». Exemple : $f(t) = 9 - 4e^{-0{,}5t}$; variations, puis $f(t) = 8$.

$f'(t) = -4 \times (-0{,}5)e^{-0{,}5t} = 2e^{-0{,}5t} > 0$: f est strictement croissante.
$f(t) = 8 \iff 4e^{-0{,}5t} = 1 \iff e^{-0{,}5t} = 0{,}25 \iff -0{,}5t = \ln 0{,}25$.
Donc $t = 2\ln 4 \approx 2{,}77$.

Attention — (eˆ(ax))′ = aeˆ(ax), pas eˆa ni aeˆx ; diviser une inégalité par un nombre négatif change son sens.

Cas 2 · Vérifier qu'une fonction est solution

Réflexe — je calcule f′(x), puis af(x) + b à part, et je compare pour tout x ; une seule valeur fausse suffit pour dire « non ».

Exemple. Questions types : « Montrer que f est solution de (E) ». Exemple : $f(x) = 3e^{2x} - 1{,}5$ et $(E) : y' = 2y + 3$.

D'une part, $f'(x) = 6e^{2x}$.
D'autre part, $2f(x) + 3 = 6e^{2x} - 3 + 3 = 6e^{2x}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = 2f(x) + 3$: f est solution de (E).

Attention — l'égalité vérifiée en un seul point ne prouve rien : il faut « pour tout x ».

Cas 3 · Résoudre y′ = ay

Réflexe — solutions x ↦ Ceˆ(ax) ; C = f(0), ou Ceˆ(ax_0) = y_0 si la condition est en x_0.

Exemple. Questions types : « Résoudre (E) », « Déterminer la solution telle que… ». Exemple : $y' = -1{,}2y$ avec $f(1) = 5$.

Les solutions sont les $x \mapsto Ce^{-1{,}2x}$, $C \in \mathbb{R}$.
$f(1) = Ce^{-1{,}2} = 5$ donne $C = 5e^{1{,}2}$.
Donc $f(x) = 5e^{1{,}2}e^{-1{,}2x} = 5e^{-1{,}2(x-1)}$; vérification : $f(1) = 5$.

Attention — a va dans l'exposant, la valeur initiale devant : pas d'inversion.

Cas 4 · Résoudre y′ = ay + b avec une condition

Réflexe — solution constante c (ac + b = 0), solutions Ceˆ(ax) + c, puis C par la condition initiale.

Exemple. Questions types : « Déterminer la solution constante », « En déduire les solutions », « Déterminer f telle que $f(0) = \ldots$ ». Exemple : $y' = 2y - 5$ avec $f(0) = 1$.

$2c - 5 = 0$ donne $c = 2{,}5$: les solutions sont les $x \mapsto Ce^{2x} + 2{,}5$.
$f(0) = C + 2{,}5 = 1$ donne $C = -1{,}5$, donc $f(x) = 2{,}5 - 1{,}5e^{2x}$.
$a > 0$ et $C < 0$: f est décroissante et tend vers $-\infty$ en $+\infty$.

Attention — la constante est −b/a, pas b ; C dépend de la condition, −b/a de l'équation seule.

Cas 5 · Modéliser, puis trouver un seuil

Réflexe — grandeur et unités, « proportionnelle à » traduit sur y′, forme y′ = ay + b, valeur initiale ; seuil par ln, conclusion avec l'unité.

Exemple. Questions types : « Justifier que θ est solution de… », « Au bout de combien de temps… ». Exemple : un gâteau à 170 °C refroidit dans une cuisine à 20 °C, coefficient 0,05 par minute. Quand passe-t-il sous 40 °C ?

$\theta' = -0{,}05(\theta - 20) = -0{,}05\theta + 1$, équilibre 20, $\theta(0) = 170$: $\theta(t) = 150e^{-0{,}05t} + 20$.
$\theta(t) < 40 \iff e^{-0{,}05t} < \dfrac{2}{15} \iff t > 20 \ln 7{,}5 \approx 40{,}3$.
Le gâteau passe sous 40 °C au bout d'environ 40,3 minutes.

Attention — une grandeur qui diminue donne un coefficient négatif ; l'équilibre n'est jamais atteint.

Cas 6 · Méthode d'Euler

Réflexe — $y_{n+1} = y_n + h(ay_n + b) = (1 + ah)y_n + hb$; je calcule pas à pas.

Exemple. Questions types : « Calculer y_1 et y_2 », « Compléter le programme », « Comparer à la valeur exacte ». Exemple : $y' = 0{,}2y + 1$, $y(0) = 5$, pas $h = 0{,}5$.

$y_{n+1} = y_n + 0{,}5(0{,}2y_n + 1) = 1{,}1y_n + 0{,}5$.
$y_1 = 1{,}1 \times 5 + 0{,}5 = 6$; $y_2 = 1{,}1 \times 6 + 0{,}5 = 7{,}1$.
y_2 est une valeur approchée de $f(1)$.

Attention — h multiplie toute la dérivée $ay_n + b$; les y_n sont des valeurs approchées.

Les pièges

- La constante n'est pas b : y′ = −0,8y + 6 a pour solution constante 7,5, pas 6.
- Le signe de −b/a : il est positif quand a et b sont de signes contraires.
- Résoudre sans condition initiale : la réponse garde la constante C, « réel quelconque ».
- Valeur initiale f(0) et valeur limite −b/a sont deux nombres différents ; la limite n'est jamais atteinte.
- eˆ(a(x − 1)) = eˆ(ax)eˆ(−a), jamais eˆ(ax) − eˆa.
- Unités : a en « par unité de temps », et une phrase de conclusion avec l'unité.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).