Équations différentielles

Fiche tableaux : solutions, allure et méthode d'Euler
(Maths complémentaires Terminale)

Les solutions à connaître

Équation	Solutions sur $\mathbb{R}$	Comment les trouver
$y' = b$ (cas $a = 0$)	$x \mapsto bx + K$	primitives de la constante b
$y' = ay$	$x \mapsto Ce^{ax}$	théorème du cours
$y' = ay + b$, $a \neq 0$	$x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$	solution constante : $ac + b = 0$

Exemple : $y' = -0{,}6y + 1{,}5$: $-0{,}6c + 1{,}5 = 0$ donne $c = 2{,}5$; solutions $x \mapsto Ce^{-0{,}6x} + 2{,}5$, $C \in \mathbb{R}$.

Trouver C avec la condition initiale

Donnée (solutions $Ce^{ax} + c$)	Équation en C	Valeur de C
$f(0) = y_0$	$C + c = y_0$	$y_0 - c$
$f(x_0) = y_0$	$Ce^{ax_0} + c = y_0$	$(y_0 - c)e^{-ax_0}$
$f(x_0) = c$	$Ce^{ax_0} = 0$	0 : la solution est constante

Exemple : $y' = 0{,}5y - 2$ et $f(0) = 1$: $c = 4$, $C = 1 - 4 = -3$, donc $f(x) = 4 - 3e^{0{,}5x}$.

Allure des solutions Ceˆ(ax) + c

Cas	Sens de variation	En $+\infty$	Position
$a < 0$, $C > 0$	décroissante	tend vers c	au-dessus de $y = c$
$a < 0$, $C < 0$	croissante	tend vers c	au-dessous de $y = c$
$a > 0$, $C > 0$	croissante	$+\infty$	au-dessus de $y = c$
$a > 0$, $C < 0$	décroissante	$-\infty$	au-dessous de $y = c$
$C = 0$	constante	c	droite $y = c$

Le sens de variation vient de $f'(x) = aCe^{ax}$, du signe de aC. Exemple : $f(x) = 11 + 3e^{-2x}$ décroît vers 11.

Méthode d'Euler

Étape	Formule
départ	x_0, $y_0 = f(x_0)$ et un pas $h > 0$
abscisse suivante	$x_{n+1} = x_n + h$
ordonnée suivante	$y_{n+1} = y_n + h(ay_n + b) = (1 + ah)y_n + hb$
nature de la suite	arithmético-géométrique ; géométrique de raison $1 + ah$ si $b = 0$
en Python	`y = y + h * (a * y + b)` répété dans une boucle `for`

Exemple : $y' = -0{,}4y + 2$, $y(0) = 0$, $h = 0{,}5$: $y_{n+1} = 0{,}8y_n + 1$, donc $y_1 = 1$ et $y_2 = 1{,}8$.

Modèles et unités

Situation	Équation	Équilibre	Unité de a
désintégration, élimination	$y' = -ky$	0	inverse du temps
refroidissement (Newton)	$\theta' = -k(\theta - \theta_a)$	θ_a	inverse du temps
apport constant D et élimination	$Q' = -kQ + D$	$\dfrac{D}{k}$	inverse du temps

Exemple : un apport de 8 mg par heure et une élimination de coefficient $0{,}2$ par heure : $Q' = -0{,}2Q + 8$, plateau 40 mg.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).