

Devoir surveillé – Équations différentielles

Résolution des équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$ — modélisation en Terminale

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Résolutions directes

(4 pts)

- | | |
|---|--|
| a) a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 2,5y$. | c) c) Déterminer la solution de $y' = 2,5y$ qui vaut 3 en 0. |
| b) b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = -1,25y + 5$. | d) d) Déterminer la solution constante de $y' = 0,8y - 14$. |

Exercice 2 – Condition initiale et étude de fonction

(4 pts)

- a) a) Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y' = -0,45y + 9$ telle que $f(0) = 30$.
b) b) Étudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
c) c) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement.
d) d) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 21$ et donner la valeur approchée au millième de la borne obtenue.

Exercice 3 – Taux de dioxyde de carbone dans une salle

(4 pts)

Une salle est ventilée en continu. Le taux de dioxyde de carbone $y(t)$, exprimé en ppm au bout de t heures, vérifie l'équation différentielle $y' = -1,2y + 1\,560$. À l'ouverture de la salle, ce taux vaut 420 ppm.

- a) a) Déterminer la solution constante de cette équation et interpréter ce nombre.
b) b) Déterminer l'expression de $y(t)$ pour tout $t \geq 0$.
c) c) Calculer le taux de dioxyde de carbone au bout de 45 minutes, arrondi au dixième de ppm.
d) d) Le seuil réglementaire d'aération est de 1 000 ppm. Déterminer, à la minute près, l'instant où il est dépassé.

Exercice 4 – Rinçage d'une cuve

(4 pts)

Une cuve contenant un colorant est rincée en continu. La concentration $c(t)$, en mg/L au bout de t heures, vérifie $c' = -0,26c$ et $c(0) = 480$.

- a) a) Exprimer $c(t)$ en fonction de t .
b) b) Calculer la concentration au bout de 5 heures, arrondie au dixième.
c) c) Déterminer, au centième d'heure, la durée au bout de laquelle la concentration initiale a été divisée par deux.
d) d) Un opérateur affirme qu'au bout de 20 heures la concentration est nulle. Expliquer son erreur par un calcul.

Exercice 5 – Retrouver l'équation d'un modèle*(4 pts)*

Une fonction f , non constante, est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$. On sait que $f(0) = 2$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$.

- a) a) Justifier que $a < 0$ et que $-\frac{b}{a} = 6$.
- b) b) On donne $b = 5,4$. Déterminer a , puis l'expression de $f(x)$.
- c) c) Montrer que, pour tout réel x , $f(x) < 6$.
- d) d) Résoudre l'équation $f(x) = 5$ et donner la valeur exacte puis une valeur approchée au millièm.

Bon courage !