

Corrigé et barème – Équations différentielles

Résolution des équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$ — modélisation en Terminale

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Résolutions directes

(4 pts)

- a) Les fonctions $x \mapsto Ce^{2,5x}$, avec $C \in \mathbb{R}$. (1)
- b) $-\frac{b}{a} = \frac{5}{1,25} = 4$: les fonctions $x \mapsto Ce^{-1,25x} + 4$, $C \in \mathbb{R}$. (1)
- c) $C = 3$, donc $f(x) = 3e^{2,5x}$. (1)
- d) $0,8y - 14 = 0$ donne $y = 17,5$: la fonction constante égale à 17,5. (1)

Repère — La constante additive d'une solution vaut $-\frac{b}{a}$ et se retrouve toujours en résolvant $ay + b = 0$.

Exercice 2 – Condition initiale et étude de fonction

(4 pts)

- a) $-\frac{b}{a} = \frac{9}{0,45} = 20$, donc $f(x) = Ce^{-0,45x} + 20$; $C + 20 = 30$ donne $C = 10$ et $f(x) = 10e^{-0,45x} + 20$. (1)
- b) $f'(x) = -4,5e^{-0,45x} < 0$ car l'exponentielle est strictement positive : f est strictement décroissante. (1)
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,45x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 20$: la droite $y = 20$ est asymptote horizontale, la courbe restant au-dessus. (1)
- d) $10e^{-0,45x} \leq 1$, soit $e^{-0,45x} \leq 0,1$, donc $-0,45x \leq \ln(0,1)$ et $x \geq \frac{\ln 10}{0,45} \approx 5,117$. (1)

Le point clé — Diviser une inégalité par un nombre négatif (ici $-0,45$) inverse le sens de l'inégalité.

Exercice 3 – Taux de dioxyde de carbone dans une salle

(4 pts)

- a) $-1,2y + 1\,560 = 0$ donne $y = 1\,300$: à long terme, le taux se stabilise à 1 300 ppm. (1)
- b) Les solutions sont $t \mapsto Ce^{-1,2t} + 1\,300$; $C + 1\,300 = 420$ donne $C = -880$, donc $y(t) = 1\,300 - 880e^{-1,2t}$. (1)
- c) $45 \text{ min} = 0,75 \text{ h}$ et $y(0,75) = 1\,300 - 880e^{-0,9}$; avec $e^{-0,9} \approx 0,40657$, on obtient $y(0,75) \approx 942,2$ ppm. (1)
- d) $1\,300 - 880e^{-1,2t} > 1\,000$ équivaut à $e^{-1,2t} < \frac{300}{880} \approx 0,34091$, soit $t > \frac{1,07615}{1,2} \approx 0,897 \text{ h}$, c'est-à-dire environ 54 minutes. (1)

Attention — Les données horaires doivent être converties dans l'unité du coefficient a avant tout calcul ($45 \text{ min} = 0,75 \text{ h}$).

Exercice 4 – Rinçage d'une cuve

(4 pts)

- a) Les solutions de $c' = -0,26c$ sont $t \mapsto Ke^{-0,26t}$ et $c(0) = K = 480$, donc $c(t) = 480e^{-0,26t}$. (1)
- b) $c(5) = 480e^{-1,3}$; comme $e^{-1,3} \approx 0,272532$, on obtient $c(5) \approx 130,8 \text{ mg/L}$. (1)
- c) $480e^{-0,26t} = 240$ donne $e^{-0,26t} = 0,5$, donc $t = \frac{\ln 2}{0,26} \approx 2,67 \text{ h}$. (1)
- d) $c(20) = 480e^{-5,2} \approx 480 \times 0,0055166 \approx 2,6 \text{ mg/L}$: l'exponentielle ne s'annule jamais, la concentration devient très faible mais reste strictement positive. (1)

Erreur fréquente — Une exponentielle ne s'annule jamais : une grandeur modélisée par Ce^{at} avec $C \neq 0$ ne peut pas atteindre zéro.

Exercice 5 – Retrouver l'équation d'un modèle*(4 pts)*

- a) Si $a \geq 0$, Ce^{ax} n'a pas de limite finie non nulle en $+\infty$ pour $C \neq 0$; donc $a < 0$, et alors $\lim f = -\frac{b}{a}$, d'où $-\frac{b}{a} = 6$. (1)
- b) $-\frac{5,4}{a} = 6$ donne $a = -0,9$; les solutions sont $x \mapsto Ce^{-0,9x} + 6$ et $f(0) = 2$ donne $C = -4$, donc $f(x) = 6 - 4e^{-0,9x}$. (1)
- c) Pour tout x , $e^{-0,9x} > 0$ donc $4e^{-0,9x} > 0$ et $f(x) = 6 - 4e^{-0,9x} < 6$: la limite n'est jamais atteinte. (1)
- d) $6 - 4e^{-0,9x} = 5$ donne $e^{-0,9x} = 0,25$, soit $x = \frac{\ln 4}{0,9} \approx 1,540$. (1)

À retenir — Une limite finie non nulle en $+\infty$ impose $a < 0$: cette limite est exactement la solution constante $-\frac{b}{a}$.