

Devoir surveillé – Échantillonnage et estimation

Intervalles de confiance et fluctuation d'échantillonnage — programme officiel Terminale générale
(option Maths complémentaires)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Un taux de retard contesté (4 pts)

- a) a) Une compagnie de transport annonce que 16 % de ses trajets arrivent en retard. On prélève au hasard un échantillon de 325 trajets. Vérifier que les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % sont remplies.
- b) b) Déterminer cet intervalle de fluctuation (bornes arrondies au millième).
- c) c) Une association de voyageurs relève 74 trajets en retard sur les 325 observés. Que conclut-elle au seuil de 5 % ?
- d) d) Un voyageur en déduit que « le taux de retard de la compagnie est de 22,77 % ». Expliquer en quoi cette affirmation est abusive.

Exercice 2 – Estimation dans une médiathèque (4 pts)

- a) a) Une médiathèque interroge 784 adhérents tirés au hasard : 294 déclarent emprunter au moins un document numérique par mois. Calculer la fréquence observée et vérifier les conditions d'utilisation d'un intervalle de confiance.
- b) b) Calculer la marge d'erreur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ au niveau de confiance 95 %.
- c) c) En déduire un intervalle de confiance de la proportion p d'adhérents concernés (bornes arrondies au millième).
- d) d) La directrice affirme que plus d'un tiers des adhérents empruntent du numérique. Cette affirmation est-elle compatible avec l'enquête ? Justifier.

Exercice 3 – Dimensionner une enquête (4 pts)

- a) a) Un service statistique a interrogé 1 521 personnes lors d'une première vague. Calculer la marge d'erreur correspondante au niveau de confiance 95 % et l'exprimer en points.
- b) b) La seconde vague doit atteindre une marge d'au plus 1,2 point. Déterminer la taille minimale de l'échantillon avec la formule $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
- c) c) La première vague situe la proportion étudiée autour de 44 %. Déterminer la taille minimale avec la formule $1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$ et comparer au résultat précédent.
- d) d) Le service conclut : « en doublant simplement notre échantillon, nous aurions divisé la marge par deux ». Expliquer l'erreur.

Exercice 4 – Simulation en Python*(4 pts)*

- a) a) On considère la fonction Python ci-dessous, où *random()* renvoie un nombre au hasard dans $[0; 1[$:

```
def freq(n, p):
    k = 0
    for i in range(n):
        if random() < p:
            k = k + 1
    return k / n
```

Expliquer ce que renvoie l'appel *freq*(196, 0.45) et préciser la loi suivie par la variable *k*.

- b) b) On exécute ensuite la boucle suivante, qui appelle 5 000 fois la fonction précédente :

```
c = 0
for j in range(5000):
    if abs(freq(196, 0.45) - 0.45) <= 1 / 196 ** 0.5:
        c = c + 1
```

Calculer la valeur de $1/196 * 0.5$ et expliquer ce que compte la variable *c*.

- c) c) La boucle affiche *c* = 4783. Interpréter ce résultat en le comparant au niveau de confiance de 95 %.
- d) d) Une élève relance le programme et obtient 4 801. Expliquer pourquoi les deux résultats diffèrent et ce qu'il faudrait faire pour obtenir une valeur plus stable.

Exercice 5 – Synthèse : une annonce à vérifier puis à estimer*(4 pts)*

- a) a) Une plateforme affirme que 28 % de ses utilisateurs ont activé la double authentification. Un audit porte sur 441 comptes tirés au hasard et en trouve 140 protégés. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de comptes protégés dans un échantillon de 441 comptes (bornes au millième).
- b) b) L'annonce de la plateforme est-elle remise en cause par l'audit au seuil de 5 % ? Justifier.
- c) c) Déterminer, à partir du relevé de l'audit, un intervalle de confiance de la proportion réelle au niveau 95 % en utilisant la marge $\frac{1}{\sqrt{n}}$, puis vérifier la cohérence avec la question b).
- d) d) L'auditeur souhaite ramener la marge d'erreur à 2 points. Déterminer le nombre de comptes à examiner et le nombre de comptes supplémentaires que cela représente.

Bon courage !