Devoir surveillé – Suites, modèles discrets et limites de suites — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Démontrer, puis calculer des limites *(5 pts)*

a) Soit a et b deux réels, avec $a \neq 1$, et (u_n) une suite telle que $u_{n+1} = a\,u_n + b$ pour tout entier naturel n. Démontrer qu'il existe un unique réel c tel que la suite constante égale à c vérifie cette relation, puis que, pour tout entier naturel n, $u_n = c + (u_0 - c)\,a^n$.

b) On suppose de plus $a > 0$ et $u_0 \neq c$. Discuter, selon la valeur de a et le signe de $u_0 - c$, la limite de (u_n).

c) Déterminer la limite de la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $r_n = \dfrac{2n + (-1)^n \sqrt{n}}{n + 5}$.

d) Déterminer la limite de la suite définie pour tout entier naturel n par $s_n = \dfrac{3^n - 2^{n+2}}{3^{n+1} + 5 \times 2^n}$.

e) Déterminer la limite de la suite définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{1 + 0{,}5 + 0{,}5^2 + \cdots + 0{,}5^n}{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n}$.

Exercice 2 – Problème — La ville et sa périphérie *(5 pts)*

Une agglomération compte $60\,000$ habitants, répartis entre la ville-centre et sa périphérie ; on suppose ce total constant. En 2026, $45\,000$ habitants vivent dans la ville-centre. Chaque année, $10\,\%$ des habitants de la ville-centre partent vivre en périphérie et $5\,\%$ des habitants de la périphérie viennent s'installer dans la ville-centre. On note v_n et p_n les nombres d'habitants de la ville-centre et de la périphérie en $2026 + n$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}85\,v_n + 3\,000$.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Étudier le sens de variation et la limite de (v_n) et de (p_n). Comment se répartit la population à long terme ?

d) Déterminer, en justifiant, la première année où la périphérie est plus peuplée que la ville-centre.

e) Généralisation. Le total vaut maintenant T habitants ; chaque année, une proportion α des habitants de la ville-centre part en périphérie et une proportion β des habitants de la périphérie s'installe dans la ville-centre, avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\alpha + \beta < 1$. Démontrer qu'à long terme la part de la ville-centre dans la population tend vers $\dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$, quelle que soit la répartition de départ. Vérifier avec les valeurs de l'énoncé.

Exercice 3 – Vrai ou faux ? *(5 pts)*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis le démontrer : une démonstration si elle est vraie, un contre-exemple si elle est fausse.

a) « Si $\lim u_n = +\infty$, alors la suite de terme général $\dfrac{u_n}{u_n^2 + 1}$ converge vers 0. »

b) « Deux suites qui vérifient la même relation $u_{n+1} = 0{,}6\,u_n + 12$ ont la même limite, quels que soient leurs premiers termes. »

c) « Si une suite (u_n) à termes strictement positifs vérifie $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout n, alors $\lim u_n = 0$. »

d) « Si $0 < q < 1$, alors la suite de terme général $q + q^2 + \cdots + q^n$ $(n \geqslant 1)$ converge vers $\dfrac{1}{1-q}$. »

e) « Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$, et si la suite des sommes $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ converge, alors $\lim u_n = 0$. »

Exercice 4 – Problème — La fonte d'un glacier *(5 pts)*

En 2026, un glacier a un volume de 12 km³. Selon un modèle, chaque année, il perd $2\,\%$ de son volume par la fonte, puis encore $0{,}3$ km³ de glace emportée par les torrents. On note V_n son volume (en km³) en $2026 + n$, tant que le glacier existe, donc $V_0 = 12$.

a) Justifier que $V_{n+1} = 0{,}98\,V_n - 0{,}3$, puis calculer V_1 et V_2.

b) Exprimer V_n en fonction de n.

c) Si le modèle reste valable, en quelle année le glacier aura-t-il disparu ? Justifier.

d) Écrire une fonction Python `disparition(V, t, b)` qui renvoie le nombre d'années au bout duquel le volume devient négatif ou nul, pour un volume initial `V` strictement positif, une fonte de `t` % par an (avec $0 < t < 100$) et une perte fixe de `b` km³ par an. Justifier que la boucle s'arrête dès que $b > 0$, et donner la valeur renvoyée par `disparition(12, 2, 0.3)`.

e) Un scénario plus favorable remplace la perte fixe par un apport de neige de g km³ par an ($g > 0$) : $V_{n+1} = 0{,}98\,V_n + g$, toujours avec $V_0 = 12$. Déterminer la plus petite valeur de g pour laquelle le volume du glacier ne descend jamais sous 10 km³. Justifier.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).