Corrigé et barème – Suites, modèles discrets et limites de suites — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Exercice 1 – Démontrer, puis calculer des limites *(5 pts)*

a) La suite constante égale à c convient si et seulement si $c = ac + b$, soit $(1-a)c = b$; comme $a \neq 1$, l'unique solution est $c = \dfrac{b}{1-a}$. On pose $v_n = u_n - c$. Comme $b = c - ac$: $v_{n+1} = a\,u_n + b - c = a\,u_n - ac = a(u_n - c) = a\,v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison a, donc $v_n = v_0\,a^n = (u_0 - c)\,a^n$, d'où $u_n = c + (u_0 - c)\,a^n$. (0,5 pt pour l'existence et l'unicité de c, 0,5 pt pour la suite géométrique et la conclusion) (1)

b) Si $0 < a < 1$: $a^n \to 0$, donc $\lim u_n = c$, quel que soit u_0. Si $a > 1$: $a^n \to +\infty$; par produit (règle des signes), $(u_0 - c)\,a^n$ tend vers $+\infty$ si $u_0 > c$ et vers $-\infty$ si $u_0 < c$; par somme, $\lim u_n = +\infty$ si $u_0 > c$ et $\lim u_n = -\infty$ si $u_0 < c$. (0,5 pt pour le cas $0 < a < 1$, 0,5 pt pour le cas $a > 1$ avec la règle des signes) (1)

c) Pour $n \geqslant 1$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et $\sqrt{n} > 0$ donnent $2n - \sqrt{n} \leqslant 2n + (-1)^n\sqrt{n} \leqslant 2n + \sqrt{n}$; on divise par $n + 5 > 0$: $\dfrac{2n - \sqrt{n}}{n+5} \leqslant r_n \leqslant \dfrac{2n + \sqrt{n}}{n+5}$. En divisant le numérateur et le dénominateur par n, et comme $\dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, les bornes s'écrivent $\dfrac{2 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{5}{n}}$ et $\dfrac{2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{5}{n}}$: elles tendent toutes deux vers 2. D'après le théorème des gendarmes, $\lim r_n = 2$. (0,5 pt pour l'encadrement, 0,5 pt pour les limites des bornes et les gendarmes) (1)

d) Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. Comme $2^{n+2} = 4 \times 2^n$ et $3^{n+1} = 3 \times 3^n$, on divise le numérateur et le dénominateur par $3^n > 0$: $s_n = \dfrac{1 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3 + 5\left(\frac{2}{3}\right)^n}$. Comme $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \to 0$: par somme et quotient, $\lim s_n = \dfrac{1}{3}$. (0,5 pt pour la division par 3^n, 0,5 pt pour la limite) (1)

e) Numérateur : $\dfrac{1 - 0{,}5^{n+1}}{1 - 0{,}5} = 2\left(1 - 0{,}5^{n+1}\right)$, qui tend vers 2. Dénominateur : $\dfrac{1 - 2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$, qui tend vers $+\infty$ car $2 > 1$. Par quotient, $\lim t_n = 0$. (0,5 pt pour les deux sommes, 0,5 pt pour la limite) (1)

Astuce — Avec plusieurs puissances, je divise par la puissance de plus grande base : il ne reste que des $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ avec $0 < \dfrac{a}{b} < 1$, qui tendent vers 0.

Exercice 2 – Problème — La ville et sa périphérie *(5 pts)*

a) La ville-centre garde $90\,\%$ de ses habitants et reçoit $5\,\%$ de ceux de la périphérie : $v_{n+1} = 0{,}9\,v_n + 0{,}05\,p_n$. Comme $p_n = 60\,000 - v_n$: $v_{n+1} = 0{,}9\,v_n + 3\,000 - 0{,}05\,v_n = 0{,}85\,v_n + 3\,000$. (0,5 pt pour la relation de départ, 0,5 pt pour la substitution) (1)

b) Suite constante solution : $c = 0{,}85c + 3\,000 \iff 0{,}15c = 3\,000 \iff c = 20\,000$. La suite $w_n = v_n - 20\,000$ vérifie $w_{n+1} = 0{,}85\,v_n + 3\,000 - 20\,000 = 0{,}85\,v_n - 17\,000 = 0{,}85\,w_n$: elle est géométrique de raison $0{,}85$ et de premier terme $w_0 = 25\,000$. Donc $v_n = 20\,000 + 25\,000 \times 0{,}85^n$. Contrôle : $v_1 = 0{,}85 \times 45\,000 + 3\,000 = 41\,250 = 20\,000 + 21\,250$. (0,5 pt pour la valeur d'équilibre, 0,5 pt pour la forme explicite démontrée) (1)

c) $v_{n+1} - v_n = 25\,000 \times 0{,}85^n \times (0{,}85 - 1) = -3\,750 \times 0{,}85^n < 0$: (v_n) est strictement décroissante, donc $p_n = 60\,000 - v_n$ est strictement croissante. Comme $0 < 0{,}85 < 1$, $\lim v_n = 20\,000$ et, par somme, $\lim p_n = 40\,000$. À long terme, un tiers des habitants vit dans la ville-centre et deux tiers en périphérie. (0,5 pt pour les sens de variation, 0,5 pt pour les limites et l'interprétation) (1)

d) $p_n > v_n \iff 60\,000 - v_n > v_n \iff v_n < 30\,000 \iff 25\,000 \times 0{,}85^n < 10\,000 \iff 0{,}85^n < 0{,}4$. À la calculatrice : $0{,}85^5 \approx 0{,}444$ et $0{,}85^6 \approx 0{,}377$, soit $v_5 \approx 31\,093$ et $v_6 \approx 29\,429$. La suite $(0{,}85^n)$ étant décroissante, la condition est vraie à partir de $n = 6$: c'est en 2032. (0,5 pt pour la traduction en inéquation, 0,5 pt pour le rang et l'année) (1)

e) Comme en a) : $v_{n+1} = (1-\alpha)v_n + \beta(T - v_n) = (1 - \alpha - \beta)v_n + \beta T$. C'est une suite arithmético-géométrique avec $a = 1 - \alpha - \beta$, et $0 < a < 1$ car $0 < \alpha + \beta < 1$. Sa valeur d'équilibre est $c = \dfrac{\beta T}{1 - a} = \dfrac{\beta T}{\alpha + \beta}$, et $v_n = c + (v_0 - c)\,a^n$ tend vers c quel que soit v_0. La part $\dfrac{v_n}{T}$ tend donc vers $\dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$. Avec $\alpha = 0{,}1$ et $\beta = 0{,}05$: $\dfrac{0{,}05}{0{,}15} = \dfrac{1}{3}$, comme en c). (0,5 pt pour la relation générale, 0,5 pt pour la limite et la vérification) (1)

Piège — Deux populations liées par un total constant se ramènent à une seule suite : on remplace p_n par $T - v_n$ avant de chercher la forme explicite.

Exercice 3 – Vrai ou faux ? *(5 pts)*

a) Vrai. Le quotient est une forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. Comme $u_n \to +\infty$, on a $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, et alors $\dfrac{u_n}{u_n^2+1} = \dfrac{1}{u_n} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{u_n^2}}$. Or $\dfrac{1}{u_n} \to 0$ et $\dfrac{1}{u_n^2} \to 0$, donc le second facteur tend vers 1 : par produit, la suite converge vers $0 \times 1 = 0$. (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour la démonstration) (1)

b) Vrai. La suite constante solution vaut $c = \dfrac{12}{1-0{,}6} = 30$, donc toute suite qui vérifie la relation s'écrit $u_n = 30 + (u_0 - 30) \times 0{,}6^n$. Comme $0 < 0{,}6 < 1$, $0{,}6^n \to 0$: toutes ces suites convergent vers 30, quel que soit u_0. (0,5 pt pour la forme explicite, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

c) Faux. La suite est alors décroissante, mais sa limite n'est pas forcément 0. Contre-exemple : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1} > 0$. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+3}{n+2} \times \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4} < 1$, et pourtant $\lim u_n = 1$. (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour le contre-exemple) (1)

d) Faux : la somme commence à q, pas à 1. $q + q^2 + \cdots + q^n = q\left(1 + q + \cdots + q^{n-1}\right) = q \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$, qui tend vers $\dfrac{q}{1-q}$ car $q^n \to 0$. Par exemple, avec $q = 0{,}5$, la limite vaut 1 et non 2. (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour la bonne limite) (1)

e) Vrai. Si $q \geqslant 1$, chaque terme vérifie $u_k = u_0\, q^k \geqslant u_0$, donc $S_n \geqslant (n+1)u_0$; comme $(n+1)u_0 \to +\infty$, par comparaison $S_n \to +\infty$ et (S_n) ne converge pas. Donc nécessairement $0 < q < 1$, et alors $u_n = u_0\, q^n \to 0$. (0,5 pt pour l'élimination du cas $q \geqslant 1$, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

Erreur fréquente — Avant d'appliquer une formule de somme, je vérifie le premier terme et le nombre de termes : $q + q^2 + \cdots + q^n$ n'est pas $1 + q + \cdots + q^n$.

Exercice 4 – Problème — La fonte d'un glacier *(5 pts)*

a) Perdre $2\,\%$ revient à multiplier par $0{,}98$, puis on retire $0{,}3$ km³ : $V_{n+1} = 0{,}98\,V_n - 0{,}3$. $V_1 = 11{,}76 - 0{,}3 = 11{,}46$ et $V_2 = 0{,}98 \times 11{,}46 - 0{,}3 = 11{,}230\,8 - 0{,}3 = 10{,}930\,8$ (en km³). (0,5 pt pour la relation, 0,5 pt pour les valeurs) (1)

b) Suite constante solution : $c = 0{,}98c - 0{,}3 \iff 0{,}02c = -0{,}3 \iff c = -15$. La suite $W_n = V_n + 15$ vérifie $W_{n+1} = 0{,}98\,V_n - 0{,}3 + 15 = 0{,}98\,V_n + 14{,}7 = 0{,}98(V_n + 15) = 0{,}98\,W_n$: elle est géométrique de raison $0{,}98$ et de premier terme $W_0 = 27$. Donc $V_n = 27 \times 0{,}98^n - 15$ (contrôle : $V_1 = 26{,}46 - 15 = 11{,}46$). La valeur d'équilibre -15 n'a pas de sens physique : c'est un outil de calcul. (0,5 pt pour la valeur $c = -15$, 0,5 pt pour la forme explicite) (1)

c) $V_{n+1} - V_n = 27 \times 0{,}98^n \times (0{,}98 - 1) = -0{,}54 \times 0{,}98^n < 0$: le volume diminue chaque année. $V_n \leqslant 0 \iff 27 \times 0{,}98^n \leqslant 15 \iff 0{,}98^n \leqslant \dfrac{5}{9}$. À la calculatrice : $V_{29} \approx 0{,}03 > 0$ et $V_{30} \approx -0{,}27 \leqslant 0$. Le volume étant décroissant, le glacier existe encore en 2055 et a disparu en $2026 + 30 = 2056$. (0,5 pt pour le sens de variation et l'inéquation, 0,5 pt pour le rang et l'année) (1)

d)

```
def disparition(V, t, b):
    n = 0
    while V > 0 :
        V = (1 - t / 100) * V - b
        n = n + 1
    return n
```

On pose $a = 1 - \dfrac{t}{100}$, avec $0 < a < 1$. Le volume suit $V_{n+1} = a\,V_n - b$, de valeur d'équilibre $c = \dfrac{-b}{1-a} < 0$, donc il converge vers c. L'intervalle ouvert $\left]2c\,;\,\dfrac{c}{2}\right[$ contient c et ne contient que des nombres négatifs ; à partir d'un certain rang, tous les termes y sont, donc le volume devient négatif et la boucle s'arrête. `disparition(12, 2, 0.3)` renvoie 30 (question c). (0,5 pt pour la fonction, 0,5 pt pour la justification de l'arrêt et la valeur) (1)

e) Valeur d'équilibre : $c = 0{,}98c + g \iff c = \dfrac{g}{0{,}02} = 50g$, et $V_n = 50g + (12 - 50g) \times 0{,}98^n$, qui tend vers $50g$. Si $50g < 10$: l'intervalle ouvert $]0\,;10[$ contient $50g$, donc tous les termes à partir d'un certain rang : le volume finit par passer sous 10 km³. Si $50g \geqslant 10$, c'est-à-dire $g \geqslant 0{,}2$: lorsque $50g \geqslant 12$, $V_n = 50g - (50g - 12) \times 0{,}98^n \geqslant 50g - (50g - 12) = 12$ car $0{,}98^n \leqslant 1$; lorsque $10 \leqslant 50g < 12$, $V_n > 50g \geqslant 10$. Dans tous les cas, $V_n \geqslant 10$ pour tout n. La plus petite valeur est $g = 0{,}2$ km³ par an : le volume $V_n = 10 + 2 \times 0{,}98^n$ décroît alors vers 10 km³ sans l'atteindre. (0,5 pt pour le cas $g < 0{,}2$ par la limite, 0,5 pt pour le cas $g \geqslant 0{,}2$ et la conclusion) (1)

Astuce — Une valeur d'équilibre négative n'a pas de sens concret, mais elle dit tout : si le modèle converge vers un nombre négatif, la grandeur finit forcément par devenir négative.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).