Devoir surveillé – Suites, modèles discrets et limites de suites — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(4 pts)*

a) Déterminer la limite de la suite définie pour tout entier naturel n par $a_n = \dfrac{(n+2)(3n-1)}{n^2+5}$.

b) Déterminer la limite de la suite définie par $S_n = 6 + 6\times 0{,}92 + 6\times 0{,}92^2 + \cdots + 6\times 0{,}92^n$.

c) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2+1}$. Étudier le sens de variation de (u_n).

d) Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 20$ et $w_{n+1} = 1{,}25\,w_n - 6$. Déterminer la valeur c de la suite constante solution puis, sachant que $w_n = c + (w_0 - c)\times 1{,}25^n$ pour tout n, déterminer la limite de (w_n).

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier : une démonstration si elle est vraie, un contre-exemple si elle est fausse.

a) « Toute suite géométrique de raison 1,5 tend vers $+\infty$. »

b) « La suite définie par $u_0 = 30$ et $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 2$ est décroissante et converge vers 20. »

c) « Si $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. »

d) « La suite définie par $S_n = 1 + 1{,}02 + 1{,}02^2 + \cdots + 1{,}02^n$ converge, car sa raison 1,02 est très proche de 1. »

Exercice 3 – Une spirale qui se resserre *(4 pts)*

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -0{,}6\,u_n + 8$.

a) Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite est-elle monotone ? Décrire l'allure de la construction des termes à l'aide de la courbe de $f : x \mapsto -0{,}6x + 8$ et de la droite d'équation $y = x$.

b) Déterminer la valeur c de la suite constante solution, puis démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 + 4\times(-0{,}6)^n$.

c) En remarquant que $(-0{,}6)^n = (-1)^n \times 0{,}6^n$, démontrer que $5 - 4\times 0{,}6^n \leqslant u_n \leqslant 5 + 4\times 0{,}6^n$, puis déterminer la limite de (u_n).

d) Déterminer le plus petit entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, u_n appartient à l'intervalle $]4{,}99\,;\,5{,}01[$. Justifier.

Exercice 4 – Problème — Un arbre qui grandit de moins en moins *(4 pts)*

Un jeune arbre mesure 120 cm lorsqu'on le plante. La première année, il grandit de 60 cm ; ensuite, chaque année, sa pousse annuelle diminue de 15 % par rapport à celle de l'année précédente. On note h_n sa hauteur (en cm) n années après la plantation, donc $h_0 = 120$.

a) Calculer h_1 et h_2, puis exprimer la pousse p_k de la k-ième année en fonction de k (pour $k \geqslant 1$).

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $h_n = 120 + 400\,(1 - 0{,}85^n)$.

c) Déterminer la limite de (h_n). Un forestier affirme que l'arbre finira par dépasser 5,5 m : a-t-il raison ?

d) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie le nombre d'années au bout duquel l'arbre atteint au moins 5 m, puis donner la valeur renvoyée.

```
def annees():
    n = 0
    h = 120
    p = 60
    while ..... :
        h = ......
        p = ......
        n = n + 1
    return n
```

Exercice 5 – Problème — Un lac à dépolluer *(4 pts)*

Un lac contient 50 tonnes d'un polluant en 2026. Chaque année, les processus naturels éliminent 12 % du polluant présent, puis une usine en rejette 3 tonnes. On note u_n la masse de polluant (en tonnes) en $2026 + n$, donc $u_0 = 50$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}88\,u_n + 3$, puis calculer u_1 et u_2.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 25 + 25 \times 0{,}88^n$.

c) Étudier le sens de variation et la limite de (u_n). Interpréter.

d) Deux plans sont proposés. Plan A : l'usine ne rejette plus que 2 tonnes par an, l'élimination naturelle restant de 12 %. Plan B : un traitement porte l'élimination à 20 % par an, les rejets restant de 3 tonnes. Quel plan donne la plus faible pollution à long terme ? Avec la seule élimination naturelle de 12 %, quel rejet annuel maximal permettrait de faire au moins aussi bien que le plan B à long terme ?

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).