Corrigé et barème – Suites, modèles discrets et limites de suites — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Exercice 1 – Automatismes *(4 pts)*

a) Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. On développe $(n+2)(3n-1) = 3n^2+5n-2$; pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{n^2\left(3+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{5}{n^2}\right)} = \dfrac{3+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{5}{n^2}}$. Le numérateur tend vers 3, le dénominateur vers 1 : par quotient, $\lim a_n = 3$. (0,5 pt pour la factorisation, 0,5 pt pour la limite) (1)

b) S_n est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 6 et de raison $0{,}92 \neq 1$: $S_n = 6 \times \dfrac{1-0{,}92^{n+1}}{1-0{,}92} = 75\left(1-0{,}92^{n+1}\right)$. Comme $0 < 0{,}92 < 1$, $0{,}92^{n+1} \to 0$, donc $\lim S_n = 75$. (0,5 pt pour la formule, 0,5 pt pour la limite) (1)

c) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n^2+1}$. Un carré est positif ou nul, donc $u_n^2+1 \geqslant 1 > 0$ et $u_{n+1}-u_n > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante, quelles que soient les valeurs de ses termes. (0,5 pt pour la différence, 0,5 pt pour le signe justifié) (1)

d) $c = 1{,}25c - 6 \iff 0{,}25c = 6 \iff c = 24$, donc $w_n = 24 + (20-24)\times 1{,}25^n = 24 - 4 \times 1{,}25^n$. Comme $1{,}25 > 1$, $1{,}25^n \to +\infty$; par produit par $-4 < 0$ puis par somme, $\lim w_n = -\infty$. (0,5 pt pour la valeur de c, 0,5 pt pour la limite) (1)

Astuce — Pour une suite définie par $u_{n+1} = u_n + (\ldots)$, le signe de $u_{n+1}-u_n$ se lit directement sur ce que l'on ajoute : inutile de connaître les termes.

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

a) Faux. Une telle suite s'écrit $u_n = u_0 \times 1{,}5^n$, et $1{,}5^n \to +\infty$ car $1{,}5 > 1$; la limite dépend du signe de u_0 (règle des signes). Contre-exemple : avec $u_0 = -2$, $u_n = -2 \times 1{,}5^n \to -\infty$. (Avec $u_0 = 0$, la suite est nulle et tend vers 0.) (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour le contre-exemple justifié) (1)

b) Vrai. Suite constante solution : $c = 0{,}9c + 2 \iff 0{,}1c = 2 \iff c = 20$, donc $u_n = 20 + (30-20)\times 0{,}9^n = 20 + 10 \times 0{,}9^n$. Alors $u_{n+1} - u_n = 10 \times 0{,}9^n \times (0{,}9-1) = -0{,}9^n < 0$: la suite est décroissante. Et $0 < 0{,}9 < 1$, donc $\lim u_n = 20$. (0,5 pt pour la forme explicite, 0,5 pt pour le sens de variation et la limite) (1)

c) Faux : « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » est une forme indéterminée. Contre-exemple : $u_n = n^2$ et $v_n = n$ (pour $n \geqslant 1$) tendent vers $+\infty$, mais $\dfrac{u_n}{v_n} = n \to +\infty$. (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour le contre-exemple) (1)

d) Faux. $S_n = \dfrac{1-1{,}02^{n+1}}{1-1{,}02} = 50\left(1{,}02^{n+1}-1\right)$. Comme $1{,}02 > 1$, $1{,}02^{n+1} \to +\infty$, donc $\lim S_n = +\infty$: la suite diverge. On peut aussi remarquer que chacun des $n+1$ termes est supérieur ou égal à 1, donc $S_n \geqslant n+1$. (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour la justification) (1)

Piège — Une affirmation générale se réfute par un seul contre-exemple ; une affirmation sur une suite précise se tranche par le calcul, souvent grâce à sa forme explicite.

Exercice 3 – Une spirale qui se resserre *(4 pts)*

a) $u_1 = -5{,}4 + 8 = 2{,}6$; $u_2 = -1{,}56 + 8 = 6{,}44$; $u_3 = -3{,}864 + 8 = 4{,}136$. On a $u_1 < u_0$ mais $u_2 > u_1$: la suite n'est pas monotone. Comme f est décroissante, la construction donne une spirale : les termes passent alternativement de part et d'autre de l'abscisse du point d'intersection de la courbe de f et de la droite $y = x$. (0,5 pt pour les valeurs, 0,5 pt pour la non-monotonie et la spirale) (1)

b) $c = -0{,}6c + 8 \iff 1{,}6c = 8 \iff c = 5$. On pose $v_n = u_n - 5$: $v_{n+1} = -0{,}6\,u_n + 8 - 5 = -0{,}6\,u_n + 3 = -0{,}6(u_n - 5) = -0{,}6\,v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison $-0{,}6$ et de premier terme $v_0 = 4$, donc $v_n = 4 \times (-0{,}6)^n$ et $u_n = 5 + 4 \times (-0{,}6)^n$. (0,5 pt pour la valeur de c, 0,5 pt pour la démonstration) (1)

c) $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$; en multipliant par $4 \times 0{,}6^n > 0$: $-4 \times 0{,}6^n \leqslant 4 \times (-0{,}6)^n \leqslant 4 \times 0{,}6^n$, puis on ajoute 5. Comme $0 < 0{,}6 < 1$, $0{,}6^n \to 0$ et les deux bornes tendent vers 5 : d'après le théorème des gendarmes, $\lim u_n = 5$. (0,5 pt pour l'encadrement, 0,5 pt pour les gendarmes) (1)

d) D'après c), si $4 \times 0{,}6^n < 0{,}01$, alors $4{,}99 < 5 - 4 \times 0{,}6^n \leqslant u_n \leqslant 5 + 4 \times 0{,}6^n < 5{,}01$. Or $4 \times 0{,}6^{11} \approx 0{,}014\,5$ et $4 \times 0{,}6^{12} \approx 0{,}008\,7$; la suite $(0{,}6^n)$ est décroissante, donc tous les u_n avec $n \geqslant 12$ sont dans l'intervalle. En revanche, $u_{11} = 5 - 4 \times 0{,}6^{11} \approx 4{,}985\,5 < 4{,}99$ n'y est pas. Donc $N = 12$. (0,5 pt pour la condition, 0,5 pt pour la valeur justifiée par les deux rangs) (1)

Méthode — Une raison négative fait osciller les termes : on encadre $(-1)^n$ entre -1 et 1 pour se ramener à $0{,}6^n$, dont on connaît la limite.

Exercice 4 – Problème — Un arbre qui grandit de moins en moins *(4 pts)*

a) $h_1 = 120 + 60 = 180$; la deuxième pousse vaut $60 \times 0{,}85 = 51$, donc $h_2 = 180 + 51 = 231$. Les pousses forment une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $p_1 = 60$: $p_k = 60 \times 0{,}85^{k-1}$. (0,5 pt pour les hauteurs, 0,5 pt pour l'expression de p_k) (1)

b) $h_n = 120 + p_1 + \cdots + p_n = 120 + 60\left(1 + 0{,}85 + \cdots + 0{,}85^{n-1}\right)$. La parenthèse compte n termes : elle vaut $\dfrac{1 - 0{,}85^n}{1 - 0{,}85} = \dfrac{1 - 0{,}85^n}{0{,}15}$. Donc $h_n = 120 + \dfrac{60}{0{,}15}\left(1 - 0{,}85^n\right) = 120 + 400\left(1 - 0{,}85^n\right)$; la formule est aussi vraie pour $n = 0$. Contrôle : $h_2 = 120 + 400 \times 0{,}277\,5 = 231$. (0,5 pt pour la somme géométrique, 0,5 pt pour la simplification) (1)

c) $0 < 0{,}85 < 1$, donc $0{,}85^n \to 0$ et $\lim h_n = 120 + 400 = 520$. De plus $0{,}85^n > 0$, donc $h_n < 520$ pour tout n : selon le modèle, l'arbre reste toujours sous 5,20 m et ne dépassera jamais 5,5 m. Le forestier a tort. (0,5 pt pour la limite, 0,5 pt pour la conclusion avec $h_n < 520$) (1)

d)

```
def annees():
    n = 0
    h = 120
    p = 60
    while h < 500 :
        h = h + p
        p = 0.85 * p
        n = n + 1
    return n
```

La suite (h_n) est croissante (on ajoute des pousses positives) et tend vers $520 > 500$, donc la boucle s'arrête. $h_{18} \approx 498{,}5 < 500$ et $h_{19} \approx 501{,}8 \geqslant 500$: la fonction renvoie 19. (0,5 pt pour la fonction, 0,5 pt pour la valeur justifiée) (1)

Erreur fréquente — De p_1 à p_n, il y a n termes, pas $n + 1$: on compte les termes avant d'appliquer la formule de la somme, dont l'exposant est le nombre de termes.

Exercice 5 – Problème — Un lac à dépolluer *(4 pts)*

a) Éliminer 12 % revient à multiplier par 0,88, puis l'usine ajoute 3 t : $u_{n+1} = 0{,}88\,u_n + 3$. Alors $u_1 = 44 + 3 = 47$ et $u_2 = 0{,}88 \times 47 + 3 = 41{,}36 + 3 = 44{,}36$ (en tonnes). (0,5 pt pour la relation, 0,5 pt pour les valeurs) (1)

b) Suite constante solution : $c = 0{,}88c + 3 \iff 0{,}12c = 3 \iff c = 25$. Avec $v_n = u_n - 25$: $v_{n+1} = 0{,}88\,u_n + 3 - 25 = 0{,}88\,u_n - 22 = 0{,}88(u_n - 25) = 0{,}88\,v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,88 et de premier terme $v_0 = 25$, donc $u_n = 25 + 25 \times 0{,}88^n$. (0,5 pt pour la valeur 25, 0,5 pt pour la suite auxiliaire et la conclusion) (1)

c) $u_{n+1} - u_n = 25 \times 0{,}88^n \times (0{,}88 - 1) = -3 \times 0{,}88^n < 0$: la masse de polluant diminue chaque année. Comme $0 < 0{,}88 < 1$, $\lim u_n = 25$: à long terme, la pollution se stabilise vers 25 t, sans descendre en dessous. (0,5 pt pour le sens de variation, 0,5 pt pour la limite interprétée) (1)

d) Plan A : $u_{n+1} = 0{,}88\,u_n + 2$, de valeur d'équilibre $\dfrac{2}{0{,}12} = \dfrac{50}{3} \approx 16{,}7$ t. Plan B : $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 3$, de valeur d'équilibre $\dfrac{3}{0{,}2} = 15$ t. Dans les deux cas $0 < a < 1$, donc la suite converge vers sa valeur d'équilibre : le plan B est le meilleur à long terme. Avec un rejet r et 12 % d'élimination, la limite vaut $\dfrac{r}{0{,}12}$, et $\dfrac{r}{0{,}12} \leqslant 15 \iff r \leqslant 1{,}8$: il faudrait rejeter au plus 1,8 t par an. (0,5 pt pour la comparaison, 0,5 pt pour le rejet maximal) (1)

Méthode — Pour comparer à long terme des modèles $u_{n+1} = a\,u_n + b$ avec $0 < a < 1$, inutile de tout recalculer : chacun converge vers sa valeur d'équilibre $\dfrac{b}{1-a}$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).