Devoir surveillé – Suites, modèles discrets et limites de suites — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n^2 - 5n + 1$. Exprimer u_{n+1} en fonction de n, sous forme développée.

b) Déterminer la limite de la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = \dfrac{5}{n^3} - 6$.

c) Déterminer la limite de la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = 4 - 2{,}5 \times 1{,}1^n$.

d) Une suite vérifie, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}4\,u_n + 9$. Déterminer la valeur c de la suite constante solution de cette relation.

e) Une pisciculture compte s_n centaines de truites l'année n. Chaque année, l'effectif augmente de $6\,\%$ par les naissances, puis on en vend 15 centaines. Écrire la relation entre s_{n+1} et s_n.

Exercice 2 – Variations, limite et seuil *(5 pts)*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{6n + 1}{2n + 3}$.

a) Calculer u_0, u_1 et u_2 (valeurs exactes).

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3 - \dfrac{8}{2n + 3}$.

c) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

e) Déterminer, en justifiant, le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 2{,}99$.

Exercice 3 – Encadrer pour conclure *(5 pts)*

a) Pour tout entier naturel n, on pose $g_n = 7 + \dfrac{3\cos n}{n^2 + 1}$. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $7 - \dfrac{3}{n^2+1} \leqslant g_n \leqslant 7 + \dfrac{3}{n^2+1}$.

b) En déduire la limite de la suite (g_n).

c) Pour tout entier naturel n, on pose $h_n = 1{,}5^n - 3\sin n$. Montrer que $h_n \geqslant 1{,}5^n - 3$, puis déterminer la limite de (h_n).

d) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $m_n = \sqrt{n}\,(\cos n - 3)$. Montrer que $m_n \leqslant -2\sqrt{n}$, puis déterminer la limite de (m_n).

e) Un élève affirme : « Si une suite vérifie $0 < k_n < 1$ pour tout n, alors elle converge vers un nombre compris entre 0 et 1. » Montrer qu'il se trompe à l'aide de la suite définie par $k_n = 0{,}5 + 0{,}25 \times (-1)^n$.

Exercice 4 – Problème — Le remplissage d'un silo *(5 pts)*

Un silo à grain reçoit 30 tonnes de blé la semaine de son ouverture (semaine 0). Ensuite, chaque semaine, l'exploitant vend 20 % du blé présent dans le silo, puis une nouvelle livraison de 30 tonnes arrive. On note u_n la masse de blé (en tonnes) dans le silo juste après la livraison de la semaine n, donc $u_0 = 30$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 30$, puis calculer u_1 et u_2.

b) Vérifier que la suite constante égale à 150 vérifie cette relation. On pose $v_n = u_n - 150$: démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 150 - 120 \times 0{,}8^n$, puis étudier le sens de variation de (u_n).

d) Déterminer la limite de la suite (u_n) et l'interpréter.

e) L'exploitant considère le silo comme plein dès que la masse de blé, juste après une livraison, dépasse 145 tonnes. Déterminer, à la calculatrice, la première semaine où c'est le cas. Justifier.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).