Corrigé et barème – Suites, modèles discrets et limites de suites — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) On remplace n par $n+1$ partout : $u_{n+1} = 3(n+1)^2 - 5(n+1) + 1 = 3n^2 + 6n + 3 - 5n - 5 + 1$ $= 3n^2 + n - 1$. Ce n'est pas $u_n + 1$. (0,5 pt pour le remplacement, 0,5 pt pour le développement) (1)

b) $n^3 \to +\infty$, donc $\dfrac{1}{n^3} \to 0$ (limite de référence) et $\dfrac{5}{n^3} \to 0$ par produit. Par somme, $\lim v_n = 0 - 6 = -6$. (0,5 pt pour la limite de $\dfrac{5}{n^3}$, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

c) $1{,}1 > 1$, donc $\lim 1{,}1^n = +\infty$; par produit par $-2{,}5 < 0$, $-2{,}5 \times 1{,}1^n \to -\infty$; par somme avec 4, $\lim w_n = -\infty$. (0,5 pt pour la limite de $1{,}1^n$, 0,5 pt pour la règle des signes et la conclusion) (1)

d) $c = 0{,}4c + 9 \iff 0{,}6c = 9 \iff c = 15$. Contrôle : $0{,}4 \times 15 + 9 = 6 + 9 = 15$. (0,5 pt pour l'équation, 0,5 pt pour la valeur) (1)

e) Une hausse de $6\,\%$ revient à multiplier par $1 + \dfrac{6}{100} = 1{,}06$; on retire ensuite les 15 centaines vendues : $s_{n+1} = 1{,}06\, s_n - 15$. C'est une relation arithmético-géométrique, avec $a = 1{,}06$ et $b = -15$. (0,5 pt pour le coefficient multiplicateur, 0,5 pt pour la relation dans le bon ordre) (1)

Méthode — Pour une limite, je nomme la règle à chaque étape : limite de référence, limite de q^n (je compare q à 1), puis « par produit » ou « par somme ».

Exercice 2 – Variations, limite et seuil *(5 pts)*

a) $u_0 = \dfrac{1}{3}$; $u_1 = \dfrac{6+1}{2+3} = \dfrac{7}{5}$; $u_2 = \dfrac{12+1}{4+3} = \dfrac{13}{7}$. (0,5 pt dès deux valeurs justes, 1 pt pour les trois) (1)

b) $3 - \dfrac{8}{2n+3} = \dfrac{3(2n+3) - 8}{2n+3} = \dfrac{6n + 9 - 8}{2n+3} = \dfrac{6n+1}{2n+3} = u_n$. (0,5 pt pour la mise au même dénominateur, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

c) $u_{n+1} - u_n = \left(3 - \dfrac{8}{2n+5}\right) - \left(3 - \dfrac{8}{2n+3}\right) = \dfrac{8}{2n+3} - \dfrac{8}{2n+5} = \dfrac{8(2n+5) - 8(2n+3)}{(2n+3)(2n+5)} = \dfrac{16}{(2n+3)(2n+5)}$. Pour n entier naturel, le dénominateur est strictement positif, donc $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante. (0,5 pt pour le calcul de la différence, 0,5 pt pour le signe et la conclusion) (1)

d) $2n + 3 \to +\infty$, donc $\dfrac{8}{2n+3} \to 0$ (quotient d'une constante par une suite qui tend vers $+\infty$). Par somme, $\lim u_n = 3$. On peut aussi factoriser par n : pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{6 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}}$, qui tend vers $\dfrac{6}{2} = 3$. (0,5 pt pour la justification, 0,5 pt pour la limite) (1)

e) $u_n > 2{,}99 \iff \dfrac{8}{2n+3} < 0{,}01 \iff 2n + 3 > 800$ (car $2n+3 > 0$) $\iff n > 398{,}5$. Le plus petit entier est $n = 399$. Contrôle : $u_{398} = 3 - \dfrac{8}{799} \approx 2{,}989\,99 \leqslant 2{,}99$ et $u_{399} = 3 - \dfrac{8}{801} \approx 2{,}990\,01 > 2{,}99$. (0,5 pt pour l'inéquation, 0,5 pt pour le rang) (1)

Astuce — Écrire u_n sous la forme « constante moins un quotient positif » donne d'un coup le sens de variation, la limite et le seuil : tout se lit sur $\dfrac{8}{2n+3}$.

Exercice 3 – Encadrer pour conclure *(5 pts)*

a) Pour tout n, $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$, donc $-3 \leqslant 3\cos n \leqslant 3$. Comme $n^2+1>0$, on divise sans changer le sens : $-\dfrac{3}{n^2+1} \leqslant \dfrac{3\cos n}{n^2+1} \leqslant \dfrac{3}{n^2+1}$, puis on ajoute 7. (0,5 pt pour l'encadrement de $\cos n$, 0,5 pt pour la division justifiée par $n^2+1>0$) (1)

b) $n^2+1 \to +\infty$, donc $\dfrac{3}{n^2+1} \to 0$: les deux bornes tendent vers 7. D'après le théorème des gendarmes, $\lim g_n = 7$. (0,5 pt pour les limites des bornes, 0,5 pt pour le théorème cité) (1)

c) $\sin n \leqslant 1$, donc $-3\sin n \geqslant -3$ (multiplication par $-3<0$: le sens change) et $h_n \geqslant 1{,}5^n - 3$. Comme $1{,}5>1$, $1{,}5^n \to +\infty$, donc $1{,}5^n - 3 \to +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\lim h_n = +\infty$. (0,5 pt pour la minoration, 0,5 pt pour la conclusion par comparaison) (1)

d) $\cos n \leqslant 1$, donc $\cos n - 3 \leqslant -2$; en multipliant par $\sqrt{n}>0$, le sens est conservé : $m_n \leqslant -2\sqrt{n}$. Or $\sqrt{n} \to +\infty$, donc $-2\sqrt{n} \to -\infty$: par comparaison, $\lim m_n = -\infty$. (0,5 pt pour la majoration, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

e) k_n vaut $0{,}75$ si n est pair et $0{,}25$ si n est impair. On a bien $0<k_n<1$ pour tout n, mais les termes alternent entre deux valeurs sans se rapprocher d'un nombre : la suite n'a pas de limite. Une suite bornée n'est pas forcément convergente. (0,5 pt pour les valeurs, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

Erreur fréquente — Pour une limite finie, il faut deux bornes qui ont la même limite (gendarmes) ; pour une limite infinie, une seule inégalité dans le bon sens suffit (comparaison). Avant de multiplier une inégalité, je vérifie le signe du facteur.

Exercice 4 – Problème — Le remplissage d'un silo *(5 pts)*

a) Chaque semaine, il reste $80\,\%$ du blé présent, soit $0{,}8\,u_n$; on ajoute ensuite les 30 t de la livraison : $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 30$. Puis $u_1 = 0{,}8\times 30 + 30 = 54$ et $u_2 = 0{,}8\times 54 + 30 = 73{,}2$ (en tonnes). (0,5 pt pour la justification, 0,5 pt pour les deux valeurs) (1)

b) $0{,}8\times 150 + 30 = 120 + 30 = 150$: la suite constante égale à 150 vérifie la relation. Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 150 = 0{,}8\,u_n + 30 - 150 = 0{,}8\,u_n - 120 = 0{,}8(u_n - 150) = 0{,}8\,v_n$: (v_n) est géométrique de raison $0{,}8$, de premier terme $v_0 = 30 - 150 = -120$. (0,5 pt pour la vérification, 0,5 pt pour la démonstration) (1)

c) $v_n = -120\times 0{,}8^n$, donc $u_n = v_n + 150 = 150 - 120\times 0{,}8^n$ (contrôle : $u_1 = 150 - 96 = 54$). Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -120\times 0{,}8^{n+1} + 120\times 0{,}8^n = 120\times 0{,}8^n \times (1-0{,}8) = 24\times 0{,}8^n > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante. (0,5 pt pour la forme explicite, 0,5 pt pour le sens de variation) (1)

d) $0<0{,}8<1$, donc $0{,}8^n \to 0$; par produit et par somme, $\lim u_n = 150$. Juste après chaque livraison, la masse de blé dans le silo se stabilise autour de 150 t, sans jamais l'atteindre, car $120\times 0{,}8^n > 0$. (0,5 pt pour la limite justifiée, 0,5 pt pour l'interprétation) (1)

e) $u_n > 145 \iff 120\times 0{,}8^n < 5$. À la calculatrice : $u_{14} \approx 144{,}72 \leqslant 145$ et $u_{15} \approx 145{,}78 > 145$. Comme (u_n) est croissante, tous les termes suivants dépassent aussi 145 : le silo est plein pour la première fois la semaine 15. (0,5 pt pour les deux valeurs qui encadrent le seuil, 0,5 pt pour la conclusion avec la croissance) (1)

Piège — La valeur d'équilibre 150 t n'est jamais atteinte : on peut demander quand la masse dépasse 145 t, mais un seuil de 150 t ne serait jamais franchi.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).