# Devoir surveillé – Primitives, équations différentielles et intégrales — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

*Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.*

## Exercice 1 – Démontrer — La valeur moyenne d'une fonction convexe *(5 pts)*

Soit $a < b$ deux réels, $f$ une fonction deux fois dérivable et convexe sur $[a\,;b]$, de courbe $\mathcal{C}_f$, $m = \dfrac{a+b}{2}$ et $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ la valeur moyenne de $f$ sur $[a\,;b]$. On démontre que $f(m) \leqslant \mu \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

a) Donner une équation de la tangente $T$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $m$. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b \big(f(m) + f'(m)(x-m)\big)\,dx = (b-a)\,f(m)$.

b) En déduire que $f(m) \leqslant \mu$.

c) On note $L(x) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Que représente la droite d'équation $y = L(x)$ ? Démontrer que $\displaystyle\int_a^b L(x)\,dx = (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$, puis que $\mu \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

d) Application. Soit $x > 0$. En appliquant ce qui précède à la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[1\,;1+x]$, démontrer que $\dfrac{2x}{x+2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant \dfrac{x(x+2)}{2(x+1)}$. En déduire un encadrement de $\ln 1{,}1$ par deux fractions, et son amplitude.

## Exercice 2 – Problème — Le retour des chamois *(5 pts)*

En 2026, on réintroduit 100 chamois dans un massif. On note $P(t)$ l'effectif, en centaines de chamois, $t$ années plus tard, avec $P(0) = 1$. On admet que $P$ est dérivable, strictement positive, et solution de l'équation différentielle $(E)$ : $y' = 0{,}3y\left(1 - \dfrac{y}{8}\right)$.

a) Expliquer pourquoi $(E)$ n'est pas de la forme $y' = ay + b$. On pose $z = \dfrac{1}{P}$. Démontrer que $z$ est solution de l'équation différentielle $z' = -0{,}3z + 0{,}037\,5$.

b) En déduire $z(t)$, puis démontrer que $P(t) = \dfrac{8}{1 + 7e^{-0{,}3t}}$ pour tout $t \geqslant 0$.

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} P(t)$ et l'interpréter. Au bout de combien d'années la population dépasse-t-elle 600 chamois ? Valeur exacte, puis au centième.

d) D'après $(E)$, la vitesse de croissance s'écrit $P'(t) = g\big(P(t)\big)$ avec $g(y) = 0{,}3y - 0{,}037\,5y^2$. Sans calculer $P''$, démontrer que la population augmente le plus vite quand elle compte 400 chamois. Déterminer à quel instant, et la vitesse de croissance maximale, en chamois par an.

e) Démontrer que $P(t) = \dfrac{8e^{0{,}3t}}{e^{0{,}3t} + 7}$, puis déterminer une primitive de $P$ sur $[0\,;+\infty[$. En déduire la population moyenne pendant les dix premières années : valeur exacte, puis arrondie à l'unité de chamois.

## Exercice 3 – Pour aller plus loin — Euler, rectangles et le nombre e *(5 pts)*

Dans tout l'exercice, $n$ est un entier supérieur ou égal à $1$, $h = \dfrac{1}{n}$ et $x_k = kh$ pour $k = 0, 1, \dots, n$.

a) On applique la méthode d'Euler à l'équation $y' = y$, avec $y(0) = 1$, sur $[0\,;1]$ avec le pas $h$ : $y_0 = 1$ et $y_{k+1} = y_k + h\,y_k$. Démontrer que $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, et expliquer pourquoi $y_n$ est une valeur approchée de $e$. Calculer $y_{10}$ et $y_{100}$ au millième.

b) À l'aide de la concavité de la fonction ln, démontrer que $\ln x \leqslant x - 1$ pour tout $x > 0$, puis que $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

c) Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie $y_n$.

```
def euler(n):
    h = 1 / n
    y = 1
    for k in range(n):
        y = ...
    return y
```

On admet que la suite $(y_n)$ est croissante. À l'aide de cette fonction ou de la calculatrice, déterminer le plus petit entier $n$ tel que $e - y_n < 0{,}05$.

d) Soit $f$ une fonction continue sur $[0\,;1]$. On applique la méthode d'Euler, avec le même pas $h$, à l'équation $y' = f(x)$, avec $y(0) = 0$ : $y_0 = 0$ et $y_{k+1} = y_k + h\,f(x_k)$. Quelle est la solution exacte de ce problème ? Démontrer que $y_n$ est la somme des rectangles à gauche $R_g$ associée à $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

e) Dans le cas $f(x) = e^x$, démontrer que $R_g = \dfrac{h(e-1)}{e^h - 1}$, calculer $R_g$ au millième pour $n = 10$, puis démontrer que $R_g$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$ quand $n \to +\infty$.

## Exercice 4 – Problème — Un médicament pris par voie orale *(5 pts)*

Après la prise d'un comprimé, la concentration d'un médicament dans le sang, en mg/L, $t$ heures après la prise, est modélisée par $C(t) = 10\left(e^{-0{,}2t} - e^{-t}\right)$, pour $t \geqslant 0$. Le médicament est efficace lorsque sa concentration est au moins égale à 2 mg/L.

a) Calculer $C(0)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t)$. Démontrer que $C'(t) = 2e^{-0{,}2t}\left(5e^{-0{,}8t} - 1\right)$, puis que la concentration est maximale à l'instant $t_m = \dfrac{5}{4}\ln 5$. Démontrer que ce maximum vaut $8 \times 5^{-\frac{1}{4}}$ mg/L et en donner une valeur approchée au centième.

b) Vérifier que $C$ est solution de l'équation différentielle $y' = -0{,}2y + 8e^{-t}$. Interpréter chacun des deux termes du second membre.

c) Démontrer que l'équation $C(t) = 2$ admet exactement deux solutions $t_1 < t_2$ dans $[0\,;+\infty[$, et donner un encadrement de chacune d'amplitude $10^{-2}$. Pendant combien de temps le médicament est-il efficace ?

d) L'exposition de l'organisme au médicament entre 0 et $x$ est $A(x) = \displaystyle\int_0^x C(t)\,dt$ (en mg·h/L). Calculer $A(x)$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x)$. Donner la concentration moyenne pendant les 24 premières heures, au centième.

e) Un comprimé à libération prolongée donne une concentration $C_k(t) = k\left(e^{-0{,}2t} - e^{-0{,}5t}\right)$, avec $k > 0$. Déterminer $k$ pour que l'exposition totale $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x C_k(t)\,dt$ soit la même qu'avec le comprimé classique. Comparer alors les concentrations maximales des deux comprimés, et l'instant où elles sont atteintes.

*Bon courage !*

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*