Corrigé et barème – Primitives, équations différentielles et intégrales — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Exercice 1 – Démontrer — La valeur moyenne d'une fonction convexe *(5 pts)*

a) $T : y = f'(m)(x-m) + f(m)$. Une primitive de $x \mapsto f(m) + f'(m)(x-m)$ est $x \mapsto f(m)\,x + f'(m)\dfrac{(x-m)^2}{2}$ ($f(m)$ et $f'(m)$ sont des constantes). Comme $b - m = m - a = \dfrac{b-a}{2}$, les termes $f'(m)\dfrac{(b-m)^2}{2}$ et $f'(m)\dfrac{(a-m)^2}{2}$ sont égaux et s'annulent dans la différence : l'intégrale vaut $f(m)\,b - f(m)\,a = (b-a)\,f(m)$. (0,5 pt pour la tangente, 0,5 pt pour le calcul) (1,25)

b) f est convexe sur $[a\,;b]$: sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes, donc $f(x) \geqslant f(m) + f'(m)(x-m)$ pour tout $x \in [a\,;b]$. Les fonctions sont continues et $a < b$: par intégration de l'inégalité, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant (b-a)\,f(m)$; en divisant par $b-a>0$, $\mu \geqslant f(m)$. (0,5 pt pour l'inégalité de convexité, 0,5 pt pour l'intégration et la division) (1,25)

c) L est affine, avec $L(a) = f(a)$ et $L(b) = f(b)$: $y = L(x)$ est la sécante qui passe par les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses a et b, et sa partie entre a et b est la corde. Une primitive de L est $x \mapsto f(a)\,x + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \times \dfrac{(x-a)^2}{2}$, d'où $\displaystyle\int_a^b L(x)\,dx = f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times \frac{(b-a)^2}{2} = (b-a)\left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{2}\right) = (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$. f convexe : sa courbe est au-dessous de ses cordes, donc $f(x) \leqslant L(x)$ sur $[a\,;b]$; en intégrant puis en divisant par $b-a>0$: $\mu \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$. (0,5 pt pour la corde, 0,5 pt pour l'intégrale de L, 0,5 pt pour l'inégalité) (1,25)

d) $g(t) = \dfrac{1}{t}$ est deux fois dérivable sur $[1\,;1+x]$, avec $g''(t) = \dfrac{2}{t^3} > 0$: g est convexe. Sa valeur moyenne vaut $\mu = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^{1+x} \frac{dt}{t} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}$. Avec $m = 1 + \dfrac{x}{2}$: $g(m) = \dfrac{2}{x+2}$ et $\dfrac{g(1)+g(1+x)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{x+2}{2(x+1)}$. Donc $\dfrac{2}{x+2} \leqslant \dfrac{\ln(1+x)}{x} \leqslant \dfrac{x+2}{2(x+1)}$, et en multipliant par $x>0$ on obtient l'encadrement demandé. Avec $x = 0{,}1$: $\dfrac{0{,}2}{2{,}1} = \dfrac{2}{21} \leqslant \ln 1{,}1 \leqslant \dfrac{0{,}1 \times 2{,}1}{2{,}2} = \dfrac{21}{220}$, soit $0{,}095\,23 \leqslant \ln 1{,}1 \leqslant 0{,}095\,46$; amplitude $\dfrac{21}{220} - \dfrac{2}{21} = \dfrac{1}{4\,620} \approx 2{,}2 \times 10^{-4}$ (la calculatrice donne $\ln 1{,}1 \approx 0{,}095\,31$). (0,5 pt pour la convexité et μ, 0,5 pt pour l'encadrement général, 0,5 pt pour l'application à $\ln 1{,}1$) (1,25)

Astuce — Intégrer une inégalité de convexité donne un encadrement d'intégrale sans calculer de primitive : la tangente au milieu minore la valeur moyenne, la corde la majore. Pour une fonction affine, les trois nombres sont égaux.

Exercice 2 – Problème — Le retour des chamois *(5 pts)*

a) Le second membre $0{,}3y\left(1-\dfrac{y}{8}\right) = 0{,}3y - 0{,}037\,5y^2$ contient un terme en y^2 : il n'est pas affine en y. P est dérivable et strictement positive, donc $z = \dfrac{1}{P}$ est dérivable et $z' = -\dfrac{P'}{P^2} = -\dfrac{0{,}3P\left(1-\frac{P}{8}\right)}{P^2} = -0{,}3 \times \dfrac{1}{P} + \dfrac{0{,}3}{8} = -0{,}3z + 0{,}037\,5$. (0,5 pt pour l'explication, 0,5 pt pour le calcul de z') (1)

b) Solution constante : $0 = -0{,}3c + 0{,}037\,5$, soit $c = 0{,}125 = \dfrac{1}{8}$. Donc $z(t) = Ce^{-0{,}3t} + \dfrac{1}{8}$; $z(0) = \dfrac{1}{P(0)} = 1$ donne $C = \dfrac{7}{8}$. Ainsi $z(t) = \dfrac{7e^{-0{,}3t}+1}{8} > 0$ et $P(t) = \dfrac{1}{z(t)} = \dfrac{8}{1+7e^{-0{,}3t}}$. (0,5 pt pour z, 0,5 pt pour P) (1)

c) Quand $t \to +\infty$, $e^{-0{,}3t} \to 0$, donc $P(t) \to \dfrac{8}{1} = 8$: la population se rapproche de 800 chamois, la capacité d'accueil du massif, sans l'atteindre. $P(t) > 6 \iff 1 + 7e^{-0{,}3t} < \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$ (les deux membres sont positifs) $\iff e^{-0{,}3t} < \dfrac{1}{21} \iff -0{,}3t < -\ln 21 \iff t > \dfrac{\ln 21}{0{,}3} = \dfrac{10}{3}\ln 21 \approx 10{,}15$ ans. (0,5 pt pour la limite interprétée, 0,5 pt pour le seuil) (1)

d) g est un trinôme de coefficient dominant $-0{,}037\,5 < 0$, de racines 0 et 8 : il est maximal en $y = 4$, avec $g(4) = 1{,}2 - 0{,}6 = 0{,}6$. Donc $P'(t) \leqslant 0{,}6$, avec égalité exactement quand $P(t) = 4$, soit 400 chamois. $P(t) = 4 \iff 7e^{-0{,}3t} = 1 \iff t = \dfrac{\ln 7}{0{,}3} = \dfrac{10}{3}\ln 7 \approx 6{,}49$ ans ; cet instant est unique car P est strictement croissante ($0 < P < 8$, donc $P' = g(P) > 0$). La vitesse maximale vaut 0,6 centaine, soit 60 chamois par an. (0,5 pt pour le maximum de g, 0,5 pt pour l'instant et la vitesse) (1)

e) En multipliant en haut et en bas par $e^{0{,}3t} > 0$: $P(t) = \dfrac{8e^{0{,}3t}}{e^{0{,}3t}+7}$. Avec $u(t) = e^{0{,}3t} + 7 > 0$, $u'(t) = 0{,}3e^{0{,}3t}$: $P = \dfrac{8}{0{,}3} \times \dfrac{u'}{u}$, de primitive $t \mapsto \dfrac{80}{3}\ln\left(e^{0{,}3t}+7\right)$. Population moyenne : $\dfrac{1}{10}\displaystyle\int_0^{10} P(t)\,dt = \dfrac{8}{3}\left(\ln\left(e^3+7\right) - \ln 8\right) = \dfrac{8}{3}\ln\dfrac{e^3+7}{8} \approx 3{,}252$ centaines, soit environ 325 chamois. Contrôle : c'est entre $P(0) = 1$ et $P(10) \approx 5{,}93$. (0,5 pt pour la primitive, 0,5 pt pour la moyenne) (1)

Erreur fréquente — Une équation qui n'est pas de la forme $y' = ay + b$ ne se résout pas avec la formule du cours : un changement de fonction inconnue, ici $z = \dfrac{1}{P}$, peut l'y ramener. Et la croissance est la plus rapide à mi-hauteur, pas au départ.

Exercice 3 – Pour aller plus loin — Euler, rectangles et le nombre e *(5 pts)*

a) $y_{k+1} = (1+h)\,y_k$: la suite (y_k) est géométrique de raison $1+h = 1+\dfrac{1}{n}$ et de premier terme 1, donc $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. La solution exacte du problème est exp, et $x_n = nh = 1$: y_n approche $\exp(1) = e$. $y_{10} = 1{,}1^{10} \approx 2{,}594$ et $y_{100} = 1{,}01^{100} \approx 2{,}705$ ($e \approx 2{,}718$). (0,5 pt pour y_n, 0,5 pt pour l'explication et les valeurs) (1)

b) $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$: ln est concave sur $]0\,;+\infty[$, sa courbe est au-dessous de ses tangentes, en particulier de la tangente en 1, d'équation $y = \dfrac{1}{1}(x-1) + \ln 1 = x-1$. Donc $\ln x \leqslant x-1$. Avec $x = 1+\dfrac{1}{n}$: $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$, donc $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant 1$, puis, l'exponentielle étant croissante, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leqslant e^1 = e$. La méthode d'Euler donne toujours une valeur par défaut de e. (0,5 pt pour $\ln x \leqslant x-1$, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

c) La ligne à compléter est $y = y + h * y$:

```
def euler(n):
    h = 1 / n
    y = 1
    for k in range(n):
        y = y + h * y
    return y
```

D'après b), $e - y_n \geqslant 0$. À la calculatrice : $y_{26} \approx 2{,}667\,8$, d'où $e - y_{26} \approx 0{,}050\,5 \geqslant 0{,}05$, et $y_{27} \approx 2{,}669\,6$, d'où $e - y_{27} \approx 0{,}048\,7 < 0{,}05$. La suite (y_n) étant croissante, $e - y_n \geqslant e - y_{26} > 0{,}05$ pour tout $n \leqslant 26$: le plus petit entier est $n = 27$. (0,5 pt pour le programme, 0,5 pt pour $n = 27$) (1)

d) La solution exacte est la primitive de f qui s'annule en 0 : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, et $F(1) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. En additionnant les relations $y_{k+1} - y_k = h\,f(x_k)$ pour $k = 0, \dots, n-1$, les termes intermédiaires se simplifient : $y_n - y_0 = h\big(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\big)$. Comme $y_0 = 0$, $y_n = h\big(f(x_0) + \cdots + f(x_{n-1})\big) = R_g$: pour une équation $y' = f(x)$, la méthode d'Euler est exactement la méthode des rectangles à gauche. (0,5 pt pour la solution exacte, 0,5 pt pour $y_n = R_g$) (1)

e) $R_g = h\left(e^0 + e^h + e^{2h} + \cdots + e^{(n-1)h}\right)$: somme de n termes d'une suite géométrique de raison $q = e^h \neq 1$, donc $R_g = h\,\dfrac{q^n - 1}{q-1} = \dfrac{h\left(e^{nh}-1\right)}{e^h - 1} = \dfrac{h(e-1)}{e^h-1}$ car $nh = 1$. Pour $n = 10$: $R_g = \dfrac{0{,}1(e-1)}{e^{0{,}1}-1} \approx 1{,}634$, inférieur à $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx = e - 1 \approx 1{,}718$ (la fonction est croissante). Quand $n \to +\infty$, $h = \dfrac{1}{n} \to 0$ et $\dfrac{e^h - 1}{h} = \dfrac{e^h - e^0}{h-0} \to \exp'(0) = 1$ (nombre dérivé de exp en 0), donc $R_g = \dfrac{e-1}{\frac{e^h-1}{h}} \to e - 1$. (0,5 pt pour la somme géométrique et la valeur, 0,5 pt pour la limite) (1)

Méthode — Une méthode numérique s'étudie avec les outils du cours : suite géométrique pour les valeurs d'Euler, concavité pour le sens de l'erreur, nombre dérivé pour la limite. Un taux d'accroissement est souvent la clé d'une limite.

Exercice 4 – Problème — Un médicament pris par voie orale *(5 pts)*

a) $C(0) = 10(1-1) = 0$. Quand $t \to +\infty$, $e^{-0{,}2t} \to 0$ et $e^{-t} \to 0$, donc $C(t) \to 0$: le médicament finit par être éliminé. $C'(t) = 10\left(-0{,}2e^{-0{,}2t} + e^{-t}\right) = 2e^{-0{,}2t}\left(-1 + 5e^{-0{,}8t}\right)$, car $e^{-t} = e^{-0{,}2t}e^{-0{,}8t}$. Comme $2e^{-0{,}2t} > 0$, $C'(t)$ a le signe de $5e^{-0{,}8t} - 1$, positif $\iff e^{-0{,}8t} > \dfrac{1}{5} \iff t < \dfrac{\ln 5}{0{,}8} = \dfrac{5}{4}\ln 5$. C croît sur $[0\,;t_m]$ puis décroît : maximum en $t_m \approx 2{,}01$ h. En t_m, $e^{-0{,}2t_m} = e^{-\frac{1}{4}\ln 5} = 5^{-\frac{1}{4}}$ et $e^{-t_m} = 5^{-\frac{5}{4}} = \dfrac{5^{-\frac{1}{4}}}{5}$, donc $C(t_m) = 10 \times 5^{-\frac{1}{4}}\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = 8 \times 5^{-\frac{1}{4}} \approx 5{,}35$ mg/L. (0,5 pt pour la dérivée et les variations, 0,5 pt pour le maximum exact) (1)

b) $C'(t) = -2e^{-0{,}2t} + 10e^{-t}$ et $-0{,}2C(t) + 8e^{-t} = -2e^{-0{,}2t} + 2e^{-t} + 8e^{-t} = -2e^{-0{,}2t} + 10e^{-t}$: égalité pour tout $t \geqslant 0$. Le terme $8e^{-t}$ est l'apport du comprimé, absorbé de plus en plus lentement ; le terme $-0{,}2C$ est l'élimination, proportionnelle à la concentration. Le second membre dépend de t : on sait vérifier une solution, mais résoudre cette équation n'est pas au programme. (0,5 pt pour la vérification, 0,5 pt pour l'interprétation) (1)

c) Sur $[0\,;t_m]$, C est continue, strictement croissante, de 0 à $C(t_m) \approx 5{,}35$; 2 est compris entre ces valeurs : une unique solution t_1 (corollaire du TVI). Sur $[t_m\,;+\infty[$, C est continue, strictement décroissante, de 5,35 vers 0 (limite) : une unique solution t_2. $C(0{,}29) \approx 1{,}954 < 2 < C(0{,}30) \approx 2{,}009$, donc $0{,}29 < t_1 < 0{,}30$; $C(8{,}03) \approx 2{,}004 > 2 > C(8{,}04) \approx 1{,}9997$, donc $8{,}03 < t_2 < 8{,}04$. $C(t) \geqslant 2$ sur $[t_1\,;t_2]$: le médicament est efficace pendant une durée $t_2 - t_1$ comprise entre $8{,}03 - 0{,}30 = 7{,}73$ h et $8{,}04 - 0{,}29 = 7{,}75$ h ; à la calculatrice, $t_1 \approx 0{,}298$ et $t_2 \approx 8{,}039$, d'où $t_2 - t_1 \approx 7{,}74$ h, soit environ 7 h 44 min. (0,5 pt pour les deux solutions, 0,5 pt pour les encadrements et la durée) (1)

d) Une primitive de C est $t \mapsto 10\left(-5e^{-0{,}2t} + e^{-t}\right)$. $A(x) = 10\left(-5e^{-0{,}2x} + e^{-x}\right) - 10(-5+1) = 40 - 50e^{-0{,}2x} + 10e^{-x}$. Quand $x \to +\infty$, $A(x) \to 40$ mg·h/L : l'exposition totale est finie. Concentration moyenne sur 24 h : $\dfrac{A(24)}{24} = \dfrac{40 - 50e^{-4{,}8} + 10e^{-24}}{24} \approx 1{,}65$ mg/L. (0,5 pt pour $A(x)$ et sa limite, 0,5 pt pour la moyenne) (1)

e) Une primitive de C_k est $t \mapsto k\left(-5e^{-0{,}2t} + 2e^{-0{,}5t}\right)$, donc $\displaystyle\int_0^x C_k(t)\,dt =$ $k\left(-5e^{-0{,}2x} + 2e^{-0{,}5x} + 3\right) \to 3k$. $3k = 40 \iff k = \dfrac{40}{3}$. $C_k'(t) = k\left(-0{,}2e^{-0{,}2t} + 0{,}5e^{-0{,}5t}\right) =$ $0 \iff e^{0{,}3t} = 2{,}5 \iff t = \dfrac{10}{3}\ln 2{,}5 \approx 3{,}05$ h (C_k' est positive avant, négative après). Alors $e^{-0{,}2t} = 2{,}5^{-\frac{2}{3}}$ et $e^{-0{,}5t} = \dfrac{2{,}5^{-\frac{2}{3}}}{2{,}5}$, donc le maximum vaut $\dfrac{40}{3} \times 2{,}5^{-\frac{2}{3}} \times 0{,}6 = 8 \times 2{,}5^{-\frac{2}{3}} \approx 4{,}34$ mg/L. Pour la même exposition totale, le comprimé à libération prolongée donne un pic plus bas (4,34 contre 5,35 mg/L) et plus tardif (3,05 h contre 2,01 h). (0,5 pt pour k, 0,5 pt pour la comparaison des maximums) (1)

Piège — L'unicité de chaque solution vient de la stricte monotonie sur chaque intervalle : on découpe en t_m avant d'appliquer le corollaire du TVI. Et une exposition « jusqu'à l'infini » est la limite d'une intégrale, pas une intégrale calculée en $+\infty$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).