Devoir surveillé – Primitives, équations différentielles et intégrales — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(4 pts)*

a) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \left(3x^2 + 4\right)\left(x^3 + 4x\right)$.

b) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par $g(x) = (x - 1)e^{x^2 - 2x}$.

c) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx$.

d) Déterminer la solution h de l'équation différentielle $y' = 3y - 6$ telle que $h(1) = 4$.

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier : une démonstration si elle est vraie, un contre-exemple si elle est fausse.

a) « Si f est continue sur $[0\,;2]$ et si $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 0$, alors $f(x) = 0$ pour tout x de $[0\,;2]$. »

b) « Les fonctions $x \mapsto \ln(3x)$ et $x \mapsto \ln x$ sont deux primitives d'une même fonction sur $]0\,;+\infty[$. »

c) « Toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = 0{,}5y - 2$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$. »

d) « $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx \leqslant e - 1$. »

Exercice 3 – Une courbe et son asymptote *(4 pts)*

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x+1}$, de courbe $\mathcal{C}_f$, et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 1$. On dit que $\mathcal{D}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (x-1)\big) = 0$.

a) Démontrer que $\mathcal{D}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$ sur $[0\,;+\infty[$.

b) Démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$. En déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$ et son minimum.

c) Pour $a > 0$, on note $\mathcal{A}(a)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{D}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$. Démontrer que $\mathcal{A}(a) = 4\ln(a+1)$.

d) Déterminer la valeur exacte de a pour laquelle $\mathcal{A}(a) = 8$, puis une valeur arrondie au centième. Déterminer $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathcal{A}(a)$ et commenter.

Exercice 4 – Problème — Le démarrage d'un vélo électrique *(4 pts)*

Un cycliste démarre sur un vélo à assistance électrique. Sa vitesse $v(t)$, en m/s, t secondes après le départ, vérifie $v(0) = 0$ et l'équation différentielle $v' = -0{,}4v + 2{,}8$: le moteur et le pédalage donnent une accélération constante, les frottements la freinent proportionnellement à la vitesse.

a) Déterminer l'expression de $v(t)$, puis $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$. Interpréter cette limite et la convertir en km/h.

b) Au bout de combien de temps le vélo atteint-il la vitesse de 6 m/s ? Valeur exacte, puis arrondie au dixième de seconde.

c) La distance parcourue pendant les 15 premières secondes est $d = \displaystyle\int_0^{15} v(t)\,dt$. Calculer d (valeur exacte, puis au dixième de mètre). Quelle distance de retard le cycliste a-t-il prise sur un cycliste qui aurait roulé dès le départ à la vitesse limite ?

d) On applique la méthode d'Euler avec le pas $h = 0{,}5$, en partant de $v_0 = 0$. Montrer que $v_{n+1} = 0{,}8 v_n + 1{,}4$, calculer v_1, v_2, v_3 et v_4, puis comparer v_4 à $v(2)$. Expliquer le sens de l'écart à l'aide de la convexité.

Exercice 5 – Problème — Offre, demande et surplus *(4 pts)*

Sur le marché d'un produit, q désigne une quantité, en milliers d'articles, avec $q \in [0\,;20]$. La fonction de demande $D(q) = \dfrac{200}{q+2}$ donne le prix, en euros, auquel les consommateurs achèteraient au total q milliers d'articles ; la fonction d'offre $O(q) = 2q + 4$ donne le prix auquel les producteurs accepteraient d'en vendre q milliers.

a) Étudier le sens de variation de D et de O sur $[0\,;20]$, puis interpréter ces sens de variation.

b) Le marché est à l'équilibre quand l'offre égale la demande. Déterminer la quantité d'équilibre q_0 et le prix d'équilibre p_0.

c) Le surplus des consommateurs est $S_C = \displaystyle\int_0^{q_0} \big(D(q) - p_0\big)\,dq$, en milliers d'euros : c'est ce que les acheteurs prêts à payer plus cher que p_0 économisent. Justifier que S_C est une aire, puis calculer sa valeur exacte et une valeur approchée à l'unité.

d) Le surplus des producteurs est $S_P = \displaystyle\int_0^{q_0} \big(p_0 - O(q)\big)\,dq$. Le calculer, puis donner le surplus total $S_C + S_P$, en euros, arrondi à la centaine d'euros.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).