Corrigé et barème – Primitives, équations différentielles et intégrales — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Exercice 1 – Automatismes *(4 pts)*

a) Avec $u(x) = x^3 + 4x$, $u'(x) = 3x^2 + 4$: $f = u'u = \dfrac{1}{2} \times 2u'u$. Une primitive de $2u'u$ est u^2, donc une primitive de f est $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^3 + 4x\right)^2$. Contrôle : $F'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2\left(3x^2 + 4\right)\left(x^3 + 4x\right) = f(x)$. (0,5 pt pour la forme $2u'u$, 0,5 pt pour le coefficient $\dfrac{1}{2}$) (1)

b) Avec $u(x) = x^2 - 2x$, $u'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$: $g = \dfrac{1}{2}u'e^u$. Une primitive de g est $G(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2 - 2x}$. Contrôle : $G'(x) = \dfrac{1}{2}(2x - 2)e^{x^2 - 2x} = g(x)$. (0,5 pt pour la forme $u'e^u$, 0,5 pt pour le coefficient) (1)

c) Une primitive de $x \mapsto e^{3x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{3}e^{3x}$. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\left(e^{3\ln 2} - e^0\right) = \frac{1}{3}\left(2^3 - 1\right) = \frac{7}{3}$, car $e^{3\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^3 = 8$. (0,5 pt pour la primitive, 0,5 pt pour $\dfrac{7}{3}$) (1)

d) Solution constante : $0 = 3c - 6$, soit $c = 2$. Les solutions sont les $x \mapsto Ce^{3x} + 2$, C réel. $h(1) = Ce^3 + 2 = 4 \iff C = 2e^{-3}$, donc $h(x) = 2e^{-3}e^{3x} + 2 = 2e^{3x-3} + 2$. Contrôle : $h(1) = 2e^0 + 2 = 4$. (0,5 pt pour la forme générale, 0,5 pt pour C et h) (1)

Astuce — Pour une forme composée, j'écris u et u' avant tout calcul : il ne reste qu'un coefficient constant à ajuster, comme le $\dfrac{1}{2}$ de $u'u = \dfrac{1}{2} \times 2u'u$.

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

a) Faux. Contre-exemple : $f(x) = x - 1$, continue, et $\displaystyle\int_0^2 (x - 1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^2 = 0$, alors que $f(0) = -1 \neq 0$. Les aires situées au-dessous de l'axe (sur $[0\,;1]$) et au-dessus (sur $[1\,;2]$) se compensent. (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour le contre-exemple calculé) (1)

b) Vrai. Pour $x > 0$, $\ln(3x) = \ln 3 + \ln x$: les deux fonctions diffèrent de la constante $\ln 3$. Toutes deux sont dérivables, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$: ce sont deux primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. (0,5 pt pour $\ln(3x) = \ln 3 + \ln x$, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

c) Faux. La solution constante vérifie $0 = 0{,}5c - 2$, soit $c = 4$; les solutions sont les $x \mapsto Ce^{0{,}5x} + 4$. Avec $C = -1$: $f(x) = 4 - e^{0{,}5x}$, $f'(x) = -0{,}5e^{0{,}5x} < 0$, et $0{,}5f(x) - 2 = 2 - 0{,}5e^{0{,}5x} - 2 = f'(x)$: f est une solution strictement décroissante. Les solutions sont croissantes seulement si $C \geqslant 0$. (0,5 pt pour la forme des solutions, 0,5 pt pour le contre-exemple vérifié) (1)

d) Vrai. Pour $x \in [0\,;1]$, $x^2 \leqslant x$ (car $x(1 - x) \geqslant 0$) ; la fonction exponentielle étant croissante, $e^{x^2} \leqslant e^x$. Les deux fonctions sont continues et $0 \leqslant 1$: par intégration de l'inégalité, $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 e^x\,dx = e - 1$. On ne connaît pas de primitive de $x \mapsto e^{x^2}$, mais on peut comparer son intégrale. (0,5 pt pour $e^{x^2} \leqslant e^x$, 0,5 pt pour l'intégration de l'inégalité) (1)

Piège — Une intégrale nulle ne veut pas dire une fonction nulle : les aires sous l'axe comptent négativement. Pour comparer deux intégrales, je compare d'abord les fonctions sur tout l'intervalle, bornes dans le bon ordre.

Exercice 3 – Une courbe et son asymptote *(4 pts)*

a) $f(x) - (x-1) = \dfrac{4}{x+1}$, et $x+1 \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x)-(x-1)\big) = 0$: l'écart vertical entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ tend vers 0, la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. Pour $x \geqslant 0$, $\dfrac{4}{x+1} > 0$: $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{D}$. (0,5 pt pour la limite, 0,5 pt pour la position) (1)

b) $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1-2)(x+1+2)}{(x+1)^2} = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$. Pour $x \geqslant 0$, $x+3>0$ et $(x+1)^2>0$: $f'(x)$ a le signe de $x-1$. f est strictement décroissante sur $[0\,;1]$, strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$, de minimum $f(1) = 0 + \dfrac{4}{2} = 2$ (avec $f(0)=3$). (0,5 pt pour la dérivée, 0,5 pt pour les variations et le minimum) (1)

c) Sur $[0\,;a]$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ (question a) : $\mathcal{A}(a) = \displaystyle\int_0^a \big(f(x)-(x-1)\big)\,dx = \int_0^a \frac{4}{x+1}\,dx$. Avec $u(x)=x+1>0$, $u'(x)=1$: une primitive de $\dfrac{4}{x+1}$ est $4\ln(x+1)$. Donc $\mathcal{A}(a) = 4\ln(a+1) - 4\ln 1 = 4\ln(a+1)$. (0,5 pt pour l'intégrale « haut moins bas », 0,5 pt pour le calcul) (1)

d) $4\ln(a+1) = 8 \iff \ln(a+1) = 2 \iff a+1 = e^2 \iff a = e^2 - 1 \approx 6{,}39$. Quand $a \to +\infty$, $a+1 \to +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, donc $\mathcal{A}(a) \to +\infty$. Bien que la courbe se rapproche de son asymptote, l'aire comprise entre elles dépasse n'importe quelle valeur : l'écart $\dfrac{4}{x+1}$ ne tend pas assez vite vers 0. (0,5 pt pour a, 0,5 pt pour la limite commentée) (1)

Méthode — Pour une aire entre deux courbes : bornes, position relative, puis intégrale « haut moins bas ». Ici, la différence $f(x)-(x-1)$ est déjà calculée en a) : elle sert deux fois.

Exercice 4 – Problème — Le démarrage d'un vélo électrique *(4 pts)*

a) Solution constante : $0 = -0{,}4c + 2{,}8$, soit $c = 7$. Les solutions sont les $t \mapsto Ce^{-0{,}4t} + 7$; $v(0) = C + 7 = 0$ donne $C = -7$, d'où $v(t) = 7 - 7e^{-0{,}4t} = 7\left(1 - e^{-0{,}4t}\right)$. Quand $t \to +\infty$, $e^{-0{,}4t} \to 0$, donc $v(t) \to 7$: la vitesse se stabilise vers 7 m/s, soit $7 \times 3{,}6 = 25{,}2$ km/h, sans l'atteindre. (0,5 pt pour $v(t)$, 0,5 pt pour la limite interprétée et convertie) (1)

b) $v(t) = 6 \iff 7e^{-0{,}4t} = 1 \iff e^{-0{,}4t} = \dfrac{1}{7} \iff -0{,}4t = -\ln 7 \iff t = \dfrac{\ln 7}{0{,}4} = 2{,}5\ln 7 \approx 4{,}9$ s. (0,5 pt pour l'équation, 0,5 pt pour le résultat) (1)

c) Une primitive de v est $t \mapsto 7t + 17{,}5e^{-0{,}4t}$ (car $\dfrac{-7}{-0{,}4} = 17{,}5$). $d = \left(105 + 17{,}5e^{-6}\right) - 17{,}5 = 87{,}5 + 17{,}5e^{-6} \approx 87{,}5$ m. À la vitesse limite, on aurait parcouru $7 \times 15 = 105$ m : le retard vaut $105 - d = 17{,}5\left(1 - e^{-6}\right) \approx 17{,}5$ m, presque entièrement pris dans les premières secondes. (0,5 pt pour d, 0,5 pt pour le retard) (1)

d) Euler : $v_{n+1} = v_n + h\,(-0{,}4v_n + 2{,}8) = v_n - 0{,}2v_n + 1{,}4 = 0{,}8v_n + 1{,}4$ (avec $h = 0{,}5$). $v_1 = 1{,}4$, $v_2 = 2{,}52$, $v_3 = 3{,}416$, $v_4 \approx 4{,}133$, valeur approchée de $v(4h) = v(2) = 7\left(1 - e^{-0{,}8}\right) \approx 3{,}855$: Euler surestime la vitesse d'environ 0,28 m/s. Les solutions $t \mapsto Ce^{-0{,}4t} + 7$ avec $C < 0$ ont pour dérivée seconde $0{,}16Ce^{-0{,}4t} < 0$: elles sont concaves, leurs courbes sont au-dessous de leurs tangentes. Chaque pas d'Euler suit la tangente de la courbe solution qui passe par le point atteint, donc arrive au-dessus d'elle ; comme deux courbes solutions ne se coupent pas, les valeurs d'Euler restent au-dessus de la vraie vitesse. (0,5 pt pour la relation et les valeurs, 0,5 pt pour la comparaison expliquée) (1)

Erreur fréquente — Une distance est l'intégrale de la vitesse, pas le produit de la vitesse limite par la durée : la vitesse restant inférieure à 7 m/s, ce produit surestime la distance. Ici, l'écart est d'environ 17,5 m.

Exercice 5 – Problème — Offre, demande et surplus *(4 pts)*

a) $D'(q) = -\dfrac{200}{(q+2)^2} < 0$: D est strictement décroissante ; plus la quantité mise sur le marché est grande, plus le prix que les consommateurs acceptent de payer est bas. $O'(q) = 2 > 0$: O est strictement croissante ; les producteurs proposent davantage quand le prix est plus élevé. (0,5 pt par fonction) (1)

b) $D(q) = O(q) \iff \dfrac{200}{q+2} = 2q + 4 \iff 200 = 2(q+2)^2$ (car $q+2>0$) $\iff (q+2)^2 = 100 \iff q + 2 = 10$ (car $q+2>0$) $\iff q = 8$. Donc $q_0 = 8$ milliers d'articles et $p_0 = O(8) = 20$ €, avec $D(8) = \dfrac{200}{10} = 20$. (0,5 pt pour l'équation, 0,5 pt pour q_0 et p_0) (1)

c) D est décroissante et $D(8) = 20$, donc $D(q) \geqslant 20$ sur $[0\,;8]$: S_C est l'aire du domaine compris entre la courbe de D, la droite d'équation $p = 20$ et les droites $q = 0$ et $q = 8$. Une primitive de $q \mapsto \dfrac{200}{q+2} - 20$ est $q \mapsto 200\ln(q+2) - 20q$. $S_C = (200\ln 10 - 160) - 200\ln 2 = 200\ln 5 - 160 \approx 162$ milliers d'euros. (0,5 pt pour l'aire justifiée, 0,5 pt pour le calcul) (1)

d) $S_P = \displaystyle\int_0^8 (20 - 2q - 4)\,dq = \int_0^8 (16 - 2q)\,dq = \Big[16q - q^2\Big]_0^8 = 128 - 64 = 64$ milliers d'euros (aire d'un triangle de base 8 et de hauteur 16). Surplus total : $200\ln 5 - 160 + 64 = 200\ln 5 - 96 \approx 225{,}888$ milliers d'euros, soit environ 225 900 €. (0,5 pt pour S_P, 0,5 pt pour le total) (1)

Méthode — Une intégrale d'une différence positive est une aire entre deux courbes : je vérifie d'abord le signe de $D(q) - p_0$ et de $p_0 - O(q)$ avant de parler d'aire.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).