Devoir surveillé – Primitives, équations différentielles et intégrales — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 6x^2 - 5 + 4e^{2x}$.

b) Déterminer une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = -0{,}4y$, puis donner la solution f telle que $f(0) = 15$.

d) Calculer $\displaystyle\int_{1}^{3} (4x - 1)\,dx$.

e) Reconnaître la forme de la fonction $x \mapsto 4x^3 e^{x^4}$, puis calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{0}^{1} 4x^3 e^{x^4}\,dx$.

Exercice 2 – Une aire sous une courbe *(5 pts)*

Soit f la fonction définie sur $[0\,;3]$ par $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 3}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal où une unité vaut 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

a) Justifier que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[0\,;3]$. Que représente alors le nombre $I = \displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,dx$?

b) Démontrer que la fonction F définie sur $[0\,;3]$ par $F(x) = 3\ln\left(x^2 + 3\right)$ est une primitive de f sur $[0\,;3]$.

c) Calculer I et démontrer que $I = 6\ln 2$.

d) En déduire l'aire du domaine sous la courbe, en cm², arrondie au centième.

e) Calculer la valeur moyenne μ de f sur $[0\,;3]$ (valeur exacte, puis arrondie au centième) et l'interpréter graphiquement.

Exercice 3 – Le refroidissement d'un bain *(5 pts)*

On fait couler un bain à 38 °C dans une salle de bains où la température reste égale à 20 °C. On note $\theta(t)$ la température de l'eau, en °C, t minutes plus tard, avec $\theta(0) = 38$. D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement de l'eau est proportionnelle à l'écart entre sa température et celle de la pièce, avec un coefficient de 0,01 par minute.

a) Justifier que θ est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0{,}01y + 0{,}2$. Déterminer la solution constante de (E) et l'interpréter.

b) Déterminer l'expression de $\theta(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.

c) Calculer la température de l'eau au bout de 30 minutes, arrondie au dixième de degré. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t)$ et interpréter.

d) On sort du bain dès que l'eau descend sous 32 °C. Au bout de combien de temps ? Donner la valeur exacte, puis une valeur arrondie au dixième de minute.

e) Calculer la température moyenne de l'eau pendant la première heure, c'est-à-dire la valeur moyenne de θ sur $[0\,;60]$: valeur exacte, puis arrondie au dixième.

Exercice 4 – Problème — Les ventes d'un jeu vidéo *(5 pts)*

Un jeu vidéo sort à l'instant $t = 0$. Sa vitesse de vente, en milliers d'exemplaires par semaine, t semaines après sa sortie, est modélisée par $v(t) = 24e^{-0{,}3t}$, pour $t \geqslant 0$. On note $N(t)$ le nombre d'exemplaires vendus, en milliers, entre la sortie et l'instant t.

a) Expliquer pourquoi N est la primitive de v sur $[0\,;+\infty[$ qui s'annule en 0, puis démontrer que $N(t) = 80\left(1 - e^{-0{,}3t}\right)$.

b) Calculer $N(10)$ et justifier que $N(10) = \displaystyle\int_0^{10} v(t)\,dt$. En déduire le nombre moyen d'exemplaires vendus par semaine pendant les dix premières semaines.

c) Combien d'exemplaires ont été vendus pendant la deuxième semaine, c'est-à-dire entre $t = 1$ et $t = 2$? Écrire ce nombre sous la forme d'une intégrale, puis le calculer, à la centaine d'exemplaires près.

d) Démontrer que N est solution de l'équation différentielle $y' = -0{,}3y + 24$. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$ et l'interpréter.

e) Au cours de quelle semaine le jeu dépasse-t-il les 60 000 exemplaires vendus ? Justifier par un calcul.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).