Corrigé et barème – Primitives, équations différentielles et intégrales — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) Par linéarité, avec les primitives usuelles : $6x^2$ a pour primitive $6 \times \dfrac{x^3}{3} = 2x^3$, -5 a pour primitive $-5x$, et $4e^{2x}$ a pour primitive $4 \times \dfrac{1}{2}e^{2x} = 2e^{2x}$ (forme e^{ax+b} avec $a=2$). Une primitive est $F(x) = 2x^3 - 5x + 2e^{2x}$. Contrôle : $F'(x) = 6x^2 - 5 + 4e^{2x} = f(x)$. (0,5 pt pour les termes polynomiaux, 0,5 pt pour $2e^{2x}$) (1)

b) Sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{x}$ a pour primitive $\ln x$ et $\dfrac{1}{x^2}$ a pour primitive $-\dfrac{1}{x}$. Par linéarité, $G(x) = 3\ln x - \dfrac{1}{x}$. Contrôle : $G'(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} = g(x)$. (0,5 pt par terme) (1)

c) Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$: ici, les fonctions $x \mapsto Ce^{-0{,}4x}$, où C est un réel quelconque. $f(0) = Ce^0 = C = 15$, donc $f(x) = 15e^{-0{,}4x}$. (0,5 pt pour toutes les solutions, 0,5 pt pour f) (1)

d) Une primitive de $x \mapsto 4x - 1$ est $x \mapsto 2x^2 - x$. Donc $\displaystyle\int_1^3 (4x-1)\,dx = \Big[2x^2 - x\Big]_1^3 = (18-3) - (2-1) = 15 - 1 = 14$. Contrôle : la fonction est affine et positive sur $[1\,;3]$; le domaine est un trapèze de bases 3 et 11 et de hauteur 2, d'aire $\dfrac{3+11}{2} \times 2 = 14$. (0,5 pt pour la primitive, 0,5 pt pour le résultat) (1)

e) Avec $u(x) = x^4$, $u'(x) = 4x^3$: la fonction est de la forme $u'e^u$, de primitive $e^u = e^{x^4}$. Donc $\displaystyle\int_0^1 4x^3 e^{x^4}\,dx = \Big[e^{x^4}\Big]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 \approx 1{,}718$. (0,5 pt pour la forme $u'e^u$, 0,5 pt pour la valeur exacte) (1)

Méthode — Je contrôle toujours une primitive en la dérivant : c'est rapide et cela évite les erreurs de coefficient, comme oublier le $\dfrac{1}{2}$ de e^{2x}.

Exercice 2 – Une aire sous une courbe *(5 pts)*

a) Pour $x \in [0\,;3]$, $6x \geqslant 0$ et $x^2+3 \geqslant 3 > 0$: par quotient, $f(x) \geqslant 0$. La fonction f est continue et positive sur $[0\,;3]$: I est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=3$. (0,5 pt pour le signe, 0,5 pt pour l'interprétation) (1)

b) Avec $u(x)=x^2+3>0$ et $u'(x)=2x$: $f(x)=3\times\dfrac{2x}{x^2+3}=3\,\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u>0$, de primitive $\ln u$. Donc $F=3\ln u$ est une primitive de f. Vérification : $F'(x)=3\times\dfrac{2x}{x^2+3}=\dfrac{6x}{x^2+3}=f(x)$. (0,5 pt pour la forme reconnue, 0,5 pt pour la vérification) (1)

c) $I=F(3)-F(0)=3\ln 12-3\ln 3=3\ln\dfrac{12}{3}=3\ln 4$. Comme $4=2^2$, $\ln 4=2\ln 2$, donc $I=6\ln 2\approx 4{,}159$ u.a. (0,5 pt pour $F(3)-F(0)$, 0,5 pt pour $6\ln 2$) (1)

d) Une unité d'aire est l'aire d'un rectangle de 2 cm sur 1 cm : 1 u.a. $=2$ cm². L'aire vaut donc $2\times 6\ln 2=12\ln 2\approx 8{,}32$ cm². (0,5 pt pour l'unité d'aire, 0,5 pt pour le résultat) (1)

e) $\mu=\dfrac{1}{3-0}\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx=\dfrac{6\ln 2}{3}=2\ln 2\approx 1{,}39$. Interprétation : le rectangle de base $[0\,;3]$ et de hauteur μ a la même aire que le domaine sous la courbe de f. (0,5 pt pour μ, 0,5 pt pour l'interprétation) (1)

Erreur fréquente — L'intégrale se calcule avec la primitive : $F(3)-F(0)$, et non $f(3)-f(0)$. Et une aire en cm² demande de convertir l'unité d'aire, qui n'est pas 1 cm² quand les unités des axes diffèrent.

Exercice 3 – Le refroidissement d'un bain *(5 pts)*

a) La vitesse de refroidissement $\theta'(t)$ est proportionnelle à l'écart $\theta(t)-20$, avec le coefficient $-0{,}01$ (la température baisse tant que l'eau est plus chaude que la pièce) : $\theta'=-0{,}01(\theta-20)=-0{,}01\theta+0{,}2$. La solution constante c vérifie $0=-0{,}01c+0{,}2$, soit $c=20$: c'est la température de la salle de bains, température d'équilibre de l'eau. (0,5 pt pour l'équation, 0,5 pt pour la solution constante interprétée) (1)

b) Les solutions de (E) sont les fonctions $t\mapsto Ce^{-0{,}01t}+20$, où C est un réel. $\theta(0)=C+20=38$, donc $C=18$ et $\theta(t)=18e^{-0{,}01t}+20$. (0,5 pt pour la forme générale, 0,5 pt pour $C=18$) (1)

c) $\theta(30)=18e^{-0{,}3}+20\approx 33{,}3$ °C. Quand $t\to+\infty$, $-0{,}01t\to-\infty$ et $e^{-0{,}01t}\to 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\theta(t)=20$: l'eau se rapproche de la température de la pièce, sans descendre en dessous. (0,5 pt pour $\theta(30)$, 0,5 pt pour la limite interprétée) (1)

d) $\theta(t)<32 \iff 18e^{-0{,}01t}<12 \iff e^{-0{,}01t}<\dfrac{2}{3} \iff -0{,}01t<\ln\dfrac{2}{3}$ (ln strictement croissante) $\iff t>-100\ln\dfrac{2}{3}=100\ln 1{,}5$ (on divise par $-0{,}01<0$: le sens change). On sort du bain au bout de $100\ln 1{,}5\approx 40{,}5$ minutes. (0,5 pt pour l'inéquation résolue, 0,5 pt pour la valeur exacte et approchée) (1)

e) Une primitive de $t\mapsto 18e^{-0{,}01t}+20$ est $t\mapsto 18\times\dfrac{1}{-0{,}01}e^{-0{,}01t}+20t=-1\,800e^{-0{,}01t}+20t$. $\displaystyle\int_0^{60}\theta(t)\,dt=\left(-1\,800e^{-0{,}6}+1\,200\right)-\left(-1\,800\right)=3\,000-1\,800e^{-0{,}6}$. La température moyenne vaut $\dfrac{1}{60}\left(3\,000-1\,800e^{-0{,}6}\right)=50-30e^{-0{,}6}\approx 33{,}5$ °C. Contrôle : elle est bien comprise entre $\theta(60)\approx 29{,}9$ °C et $\theta(0)=38$ °C. (0,5 pt pour la primitive, 0,5 pt pour la valeur moyenne) (1)

Piège — Quand on divise une inéquation par le coefficient négatif $-0{,}01$, le sens change. Un contrôle de bon sens : $\theta(30)\approx 33{,}3$ °C est encore au-dessus de 32 °C, donc la durée cherchée dépasse 30 minutes.

Exercice 4 – Problème — Les ventes d'un jeu vidéo *(5 pts)*

a) v est la vitesse de vente, c'est-à-dire le taux de variation du nombre d'exemplaires vendus : $N' = v$, donc N est une primitive de v, et $N(0) = 0$ (rien n'est vendu avant la sortie). Les primitives de v sont les $t \mapsto 24 \times \dfrac{1}{-0{,}3} e^{-0{,}3t} + k = -80e^{-0{,}3t} + k$. $N(0) = -80 + k = 0$ donne $k = 80$, d'où $N(t) = 80 - 80e^{-0{,}3t} = 80\left(1 - e^{-0{,}3t}\right)$. (0,5 pt pour la justification, 0,5 pt pour l'expression) (1)

b) $N(10) = 80\left(1 - e^{-3}\right) \approx 76{,}0$ milliers d'exemplaires. Comme N est une primitive de v, $\displaystyle\int_0^{10} v(t)\,dt = N(10) - N(0) = N(10)$. Le nombre moyen d'exemplaires vendus par semaine est la valeur moyenne de v sur $[0\,;10]$: $\dfrac{1}{10}\displaystyle\int_0^{10} v(t)\,dt = \dfrac{N(10)}{10} \approx 7{,}60$ milliers, soit environ 7 600 exemplaires par semaine. (0,5 pt pour $N(10)$ et l'intégrale, 0,5 pt pour la moyenne) (1)

c) Le nombre vendu pendant la deuxième semaine est $N(2) - N(1) = \displaystyle\int_1^2 v(t)\,dt = 80\left(e^{-0{,}3} - e^{-0{,}6}\right) \approx 15{,}36$ milliers, soit environ 15 400 exemplaires. (0,5 pt pour l'intégrale, 0,5 pt pour la valeur) (1)

d) $N'(t) = v(t) = 24e^{-0{,}3t}$ et $-0{,}3N(t) + 24 = -24 + 24e^{-0{,}3t} + 24 = 24e^{-0{,}3t}$: les deux expressions sont égales pour tout $t \geqslant 0$, donc N est solution. Quand $t \to +\infty$, $e^{-0{,}3t} \to 0$, donc $N(t) \to 80$: selon ce modèle, le jeu se vendra au total à près de 80 000 exemplaires, sans jamais les atteindre. (0,5 pt pour la vérification, 0,5 pt pour la limite interprétée) (1)

e) $N(t) > 60 \iff 1 - e^{-0{,}3t} > \dfrac{3}{4} \iff e^{-0{,}3t} < \dfrac{1}{4} \iff -0{,}3t < -\ln 4 \iff t > \dfrac{\ln 4}{0{,}3} = \dfrac{10}{3}\ln 4 \approx 4{,}62$. Le cap des 60 000 exemplaires est franchi pendant la cinquième semaine (entre $t = 4$ et $t = 5$). Contrôle : $N(4) = 80\left(1 - e^{-1{,}2}\right) \approx 55{,}9$ et $N(5) \approx 62{,}1$. (0,5 pt pour l'inéquation, 0,5 pt pour la semaine) (1)

Astuce — Une quantité totale est une primitive de son rythme de variation : le nombre d'exemplaires vendus entre deux instants se lit comme une intégrale de la vitesse de vente, et la constante est fixée par la valeur de départ.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).