Devoir surveillé – Lois de probabilité et statistique à deux variables — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Démontrer *(5 pts)*

a) Démontrer, à l'aide de la relation de Pascal, que pour tout entier $n \geqslant 2$: $\binom{n}{2} = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$. En déduire que $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

b) Démontrer que, pour tout réel p de $[0\,;1]$, $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$. En déduire que l'écart type d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n\,;p)$ est toujours inférieur ou égal à $\dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

c) X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, avec $0 < p < 1$. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P\big(X \in \{2\,;4\,;\dots\,;2n\}\big) = \dfrac{1-p}{2-p}\Big(1-(1-p)^{2n}\Big)$. En déduire la limite de cette probabilité quand n tend vers $+\infty$. Le premier succès a-t-il plus de chances d'arriver à un rang pair ou à un rang impair ?

d) Soit k un réel et f la fonction définie sur $[2\,;+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{k}{t^2}$. Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité sur $[2\,;+\infty[$, puis calculer $P(X > 10)$ pour une variable aléatoire X de densité f.

e) Avec la densité de la question d), démontrer que $\displaystyle\int_2^x t\,f(t)\,dt$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Que peut-on en conclure pour l'espérance de X ?

Exercice 2 – Problème — La première panne d'une éolienne *(5 pts)*

La durée D, en années, entre la mise en service d'une éolienne d'un certain modèle et sa première panne suit une loi exponentielle de paramètre λ. Sur un très grand parc, 18 % des éoliennes de ce modèle ont eu leur première panne au cours de leur première année de service. Arrondir les probabilités au millième.

a) Démontrer que $\mathrm{e}^{-\lambda} = 0{,}82$. En déduire λ au dix-millième, puis la durée moyenne sans panne au centième d'année.

b) Une éolienne n'a eu aucune panne pendant ses 3 premières années. Calculer, en justifiant, la probabilité qu'elle n'en ait pas non plus pendant les 2 années suivantes.

c) Un parc compte 20 éoliennes neuves de ce modèle, dont les pannes sont indépendantes. On note K le nombre d'éoliennes sans panne pendant leurs 2 premières années. Donner la loi de K, puis calculer $P(K \geqslant 15)$.

d) Si `lam` est un réel strictement positif, `-log(1 - random()) / lam` simule la loi exponentielle de paramètre `lam` (`log` désigne le logarithme népérien). Compléter la condition de la fonction ci-dessous pour qu'elle renvoie une réalisation de K, puis préciser la loi suivie par la valeur renvoyée par `simule(lam)`, pour un paramètre `lam` quelconque.

```
from random import random
from math import log

def simule(lam):
    K = 0
    for i in range(20):
        d = -log(1 - random()) / lam
        if ..... :
            K = K + 1
    return K
```

e) Le constructeur veut un nouveau modèle tel que $P(K \geqslant 15) \geqslant 0{,}9$. On note $p = \mathrm{e}^{-2\lambda}$ la probabilité qu'une éolienne n'ait pas de panne pendant ses 2 premières années. Déterminer, à la calculatrice, la plus petite valeur de p parmi $0{,}80$; $0{,}81$; … ; $0{,}90$ qui convient. En déduire la valeur de λ correspondante (au dix-millième) et la durée moyenne sans panne de ce nouveau modèle. Commenter.

Exercice 3 – Vrai ou faux ? *(5 pts)*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier : une démonstration si elle est vraie, un contre-exemple ou un calcul si elle est fausse.

a) « Si X suit $\mathcal{B}(n\,;p)$, alors $Y = n - X$ suit $\mathcal{B}(n\,;1-p)$. »

b) « Si U suit la loi uniforme sur $[0\,;1]$, alors U^2 suit aussi la loi uniforme sur $[0\,;1]$. »

c) « Si l'on ajoute à une série statistique double un point situé exactement sur sa droite des moindres carrés, la droite des moindres carrés de la nouvelle série est la même. »

d) « Si T suit une loi exponentielle, alors $P\big(T > 2E(T)\big) = \dfrac{1}{2}\,P\big(T > E(T)\big)$. »

e) « Si X suit $\mathcal{B}(100\,;0{,}5)$, alors $P(45 \leqslant X \leqslant 55) \geqslant 0{,}95$. »

Exercice 4 – Problème — Combien de temps reste un lecteur ? *(5 pts)*

Un site d'information mesure le temps passé sur ses articles. Sur un très grand nombre de lecteurs, il relève le pourcentage y de lecteurs encore sur la page t secondes après leur arrivée. On note T le temps, en secondes, passé sur la page par un lecteur pris au hasard.

t_i (s)	10	20	30	40	60	90
y_i (%)	84	70	59	49	35	20

a) On suppose que T suit une loi exponentielle de paramètre λ. Montrer qu'alors $\ln y$ devrait être une fonction affine de t, dont on précisera le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

b) On pose $z = \ln y$. Calculer les valeurs z_i (au millième), puis donner à la calculatrice la droite de régression de z en t (coefficient directeur au dix-millième, ordonnée à l'origine au millième) et le coefficient de corrélation au dix-millième. Le modèle exponentiel est-il adapté ?

c) On prend pour λ l'opposé du coefficient directeur obtenu à la question b). Calculer la durée moyenne et la durée médiane passées sur la page, à la seconde près. La médiane est-elle cohérente avec le tableau ?

d) D'après le tableau, parmi les lecteurs encore présents au bout de 30 s, quelle proportion l'est encore au bout de 90 s ? Comparer avec la valeur donnée par le modèle, et dire quelle propriété de la loi exponentielle on teste ainsi.

e) Le site veut afficher, t secondes après l'arrivée d'un lecteur, un message proposant un autre article. Pour un groupe de 40 lecteurs indépendants, déterminer la plus grande durée t, en secondes entières, telle que la probabilité qu'au moins un des 40 lecteurs voie le message soit supérieure ou égale à 0,99.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).