Devoir surveillé – Lois de probabilité et statistique à deux variables — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(4 pts)*

a) X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ avec $E(X)=6$ et $V(X)=4{,}2$. Déterminer n et p, puis donner $P(X\leqslant 4)$ au millième.

b) Y suit une loi géométrique de paramètre p et $P(Y>3)=0{,}216$. Déterminer p, puis $E(Y)$.

c) Une variable aléatoire T, à valeurs dans $[0\,;2]$, a pour fonction de répartition F définie sur $[0\,;2]$ par $F(x)=\dfrac{x^2+2x}{8}$. Déterminer la densité f de T sur $[0\,;2]$, puis calculer $E(T)$.

d) Pour cinq journées d'hiver, on relève la température moyenne x (en °C) et la consommation y (en kWh) de chauffage d'une maison : x_i : 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 et y_i : 48 ; 41 ; 35 ; 27 ; 20. Donner à la calculatrice r au millième et une équation de la droite de régression de y en x (coefficients au centième), puis estimer la consommation d'une journée à 9 °C.

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier : une démonstration si elle est vraie, un contre-exemple ou un calcul si elle est fausse.

a) « Si X suit $\mathcal{B}(10\,;0{,}5)$, alors $P(X\leqslant 4)=P(X\geqslant 6)$. »

b) « Si T suit une loi exponentielle, alors $P\big(T\leqslant E(T)\big)=0{,}5$: la moitié des durées sont inférieures à la moyenne. »

c) « Léo joue à un jeu où il gagne chaque partie avec la probabilité 0,1, indépendamment des autres parties. Il vient de perdre ses 10 premières parties. La probabilité qu'il gagne au moins une fois au cours des 5 parties suivantes est la même que celle de gagner au moins une fois au cours de ses 5 premières parties. »

d) « Pour une série statistique double de point moyen $G(4\,;12)$, la droite de régression de y en x peut avoir pour équation $y=2x+3$. »

Exercice 3 – Problème — Des détecteurs de fumée *(4 pts)*

La durée de fonctionnement D, en années, d'un détecteur de fumée d'un certain modèle suit une loi exponentielle. Sa durée de fonctionnement moyenne est de 8 ans. Arrondir les probabilités au millième.

a) Déterminer le paramètre λ de la loi de D, puis calculer la probabilité qu'un détecteur fonctionne encore au bout de 10 ans.

b) Un immeuble est équipé de 12 détecteurs neufs de ce modèle, qui fonctionnent indépendamment les uns des autres. On note N le nombre de détecteurs qui fonctionnent encore au bout de 10 ans. Justifier que N suit une loi binomiale, puis calculer $P(N \geqslant 4)$.

c) Un détecteur fonctionne depuis 4 ans. Selon le modèle, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore au moins 10 ans de plus ? Ce résultat est-il réaliste pour un appareil qui s'use ?

d) Combien de détecteurs neufs faut-il installer, au minimum, pour que la probabilité qu'au moins l'un d'eux fonctionne encore au bout de 10 ans soit supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice 4 – Problème — La durée d'une intervention *(4 pts)*

La durée T, en heures, d'une intervention d'un plombier à domicile est modélisée par une variable aléatoire de densité f définie sur $[0\,;3]$ par $f(t) = k\,(9 - t^2)$, où k est un réel strictement positif, et nulle en dehors de $[0\,;3]$.

a) Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité sur $[0\,;3]$.

b) Déterminer la fonction de répartition F de T sur $[0\,;3]$, puis calculer $P(T \leqslant 1)$ (valeur exacte).

c) Calculer la durée moyenne d'une intervention, en heures puis en minutes, et la probabilité qu'une intervention dure plus de 2 heures.

d) Le plombier effectue 10 interventions dans la semaine ; leurs durées sont indépendantes. On note L le nombre d'interventions de plus de 2 heures. Calculer $P(L \geqslant 2)$ au millième, ainsi que $E(L)$.

Exercice 5 – Problème — Des putts au golf *(4 pts)*

Un club de golf relève, sur un grand nombre de putts (coups roulés vers le trou sur le green), le pourcentage y de putts réussis selon la distance x au trou, en mètres.

x_i (m)	1	2	3	4	5	6
y_i (%)	88	71	56	42	30	19

a) Calculer les coordonnées du point moyen G, puis donner à la calculatrice le coefficient de corrélation r au millième. Commenter.

b) Donner une équation de la droite de régression de y en x (coefficients au centième). Interpréter le coefficient directeur.

c) Estimer avec ce modèle le pourcentage de putts réussis à 2,5 m du trou. S'agit-il d'une interpolation ou d'une extrapolation ?

d) Une golfeuse tente 10 putts à 2,5 m du trou ; on admet que chacun est réussi, indépendamment des autres, avec une probabilité égale au pourcentage estimé à la question c), arrondi à l'unité. On note X le nombre de putts réussis. Calculer $P(X \geqslant 6)$ au millième et $E(X)$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).