Corrigé et barème – Lois de probabilité et statistique à deux variables — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Exercice 1 – Automatismes *(4 pts)*

a) $\dfrac{V(X)}{E(X)} = \dfrac{np(1-p)}{np} = 1-p = \dfrac{4{,}2}{6} = 0{,}7$, donc $p = 0{,}3$ et $n = \dfrac{E(X)}{p} = \dfrac{6}{0{,}3} = 20$. À la calculatrice, pour $\mathcal{B}(20\,;0{,}3)$: $P(X \leqslant 4) \approx 0{,}238$. (0,5 pt pour n et p, 0,5 pt pour la probabilité) (1)

b) $P(Y > 3) = (1-p)^3 = 0{,}216 = 0{,}6^3$; la fonction cube est strictement croissante, donc $1-p = 0{,}6$ et $p = 0{,}4$. Alors $E(Y) = \dfrac{1}{0{,}4} = 2{,}5$. (0,5 pt pour p, 0,5 pt pour l'espérance) (1)

c) $f = F' : f(x) = \dfrac{2x+2}{8} = \dfrac{x+1}{4}$ sur $[0\,;2]$. $E(T) = \displaystyle\int_0^2 t \times \frac{t+1}{4}\,dt = \frac{1}{4}\Big[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\Big]_0^2 = \frac{1}{4}\Big(\frac{8}{3} + 2\Big) = \frac{1}{4} \times \frac{14}{3} = \frac{7}{6} \approx 1{,}17$. (0,5 pt pour la densité, 0,5 pt pour l'espérance) (1)

d) $r \approx -0{,}999$: les points sont presque alignés sur une droite décroissante. Droite de régression : $y = -2{,}33x + 52{,}87$ (exactement $a = \dfrac{\operatorname{Cov}(x,y)}{V(x)} = \dfrac{-42}{18} = -\dfrac{7}{3}$). Pour $x = 9$: $y = -2{,}33 \times 9 + 52{,}87 \approx 31{,}9$ kWh ; c'est une interpolation, car $9 \in [2\,;14]$. (0,5 pt pour r et la droite, 0,5 pt pour l'estimation) (1)

Astuce — Pour une loi binomiale, le quotient $\dfrac{V(X)}{E(X)} = \dfrac{np(1-p)}{np}$ donne directement $1-p$: les deux paramètres se retrouvent en deux lignes.

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

a) Vrai. Ici $p = 1-p = 0{,}5$, donc $P(X=k) = \binom{10}{k} \times 0{,}5^{10}$. Par symétrie, $\binom{10}{k} = \binom{10}{10-k}$, donc $P(X=k) = P(X=10-k)$. En associant $k = 0, 1, \ldots, 4$ à $10-k = 10, 9, \ldots, 6$, les deux sommes sont égales ; elles valent $\dfrac{1+10+45+120+210}{1\,024} = \dfrac{386}{1\,024} \approx 0{,}377$. (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour la justification par la symétrie) (1)

b) Faux. Avec $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$: $P\Big(T \leqslant \dfrac{1}{\lambda}\Big) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \times \frac{1}{\lambda}} = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632$, quel que soit λ. Environ 63 % des durées sont inférieures à la moyenne : la médiane $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$ est plus petite que l'espérance. (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour le calcul) (1)

c) Vrai. Le rang X de la première partie gagnée suit $\mathcal{G}(0{,}1)$ (parties identiques et indépendantes). Par absence de mémoire, $P_{X>10}(X > 15) = P(X > 5) = 0{,}9^5$, donc $P_{X>10}(X \leqslant 15) = 1 - 0{,}9^5 \approx 0{,}410$, qui est aussi $P(X \leqslant 5)$. Les défaites passées ne rendent pas la victoire plus probable. (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour l'absence de mémoire) (1)

d) Faux. La droite des moindres carrés passe toujours par le point moyen, puisque $b = \overline{y} - a\,\overline{x}$. Or $2 \times 4 + 3 = 11 \neq 12$: G n'est pas sur cette droite. Avec $a = 2$, il faudrait $b = 12 - 2 \times 4 = 4$. (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour l'argument du point moyen) (1)

Piège — L'impression de « compensation » (après dix défaites, la victoire serait proche) est le piège classique : avec des parties indépendantes, la loi géométrique n'a pas de mémoire.

Exercice 3 – Problème — Des détecteurs de fumée *(4 pts)*

a) $E(D) = \dfrac{1}{\lambda} = 8$, donc $\lambda = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$. $P(D > 10) = \mathrm{e}^{-0{,}125 \times 10} = \mathrm{e}^{-1{,}25} \approx 0{,}287$. (0,5 pt pour λ, 0,5 pt pour la probabilité) (1)

b) Pour chaque détecteur, « il fonctionne encore au bout de 10 ans » est un succès de probabilité $q = \mathrm{e}^{-1{,}25}$; les 12 épreuves sont identiques et indépendantes, et N compte les succès : N suit $\mathcal{B}\left(12\,;\mathrm{e}^{-1{,}25}\right)$. À la calculatrice, avec la valeur non arrondie de q : $P(N \geqslant 4) = 1 - P(N \leqslant 3) \approx 1 - 0{,}534 = 0{,}466$; avec q arrondi à 0,287, on trouve 0,467, réponse acceptée. (0,5 pt pour la loi justifiée, 0,5 pt pour la probabilité) (1)

c) $\{D > 14\}$ est inclus dans $\{D > 4\}$ et, par absence de mémoire de la loi exponentielle, $P_{D>4}(D > 14) = P(D > 10) = \mathrm{e}^{-1{,}25} \approx 0{,}287$: autant que pour un détecteur neuf. C'est peu réaliste pour un appareil qui s'use (pile, capteur qui vieillit) : la loi exponentielle modélise des pannes accidentelles, sans vieillissement ; avec de l'usure, un détecteur déjà âgé aurait moins de chances de tenir encore 10 ans. (0,5 pt pour le calcul justifié, 0,5 pt pour le commentaire) (1)

d) Avec n détecteurs, $P(\text{au moins un}) = 1 - (1-q)^n$. Or $1 - (1-q)^n \geqslant 0{,}99 \iff (1-q)^n \leqslant 0{,}01 \iff n\ln(1-q) \leqslant \ln 0{,}01 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln(1-q)}$, car on divise par $\ln(1-q) < 0$. Et $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln(1-q)} \approx 13{,}64$. Contrôle : $n = 13$ donne $1 - (1-q)^{13} \approx 0{,}987\,6 < 0{,}99$ et $n = 14$ donne $\approx 0{,}991\,1$. Il faut au moins 14 détecteurs. (0,5 pt pour l'inéquation, 0,5 pt pour la valeur justifiée) (1)

Méthode — Durée de vie exponentielle et nombre d'appareils : je calcule d'abord la probabilité qu'un appareil dépasse la durée voulue, $\mathrm{e}^{-\lambda t}$; elle devient le paramètre p de la loi binomiale.

Exercice 4 – Problème — La durée d'une intervention *(4 pts)*

a) f est continue sur $[0\,;3]$ et, pour $t \in [0\,;3]$, $9 - t^2 \geqslant 0$, donc $f \geqslant 0$ puisque $k > 0$. Il faut $\displaystyle\int_0^3 k(9 - t^2)\,dt = k\left[9t - \frac{t^3}{3}\right]_0^3 = k(27 - 9) = 18k = 1$, d'où $k = \dfrac{1}{18}$. (0,5 pt pour la positivité et la continuité, 0,5 pt pour k) (1)

b) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{9 - t^2}{18}\,dt = \frac{1}{18}\left[9t - \frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{9x}{18} - \frac{x^3}{54} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{54}$. Contrôle : $F(3) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{27}{54} = 1$.
$P(T \leqslant 1) = F(1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{54} = \dfrac{26}{54} = \dfrac{13}{27} \approx 0{,}481$. (0,5 pt pour F, 0,5 pt pour la probabilité) (1)

c) $E(T) = \displaystyle\int_0^3 t \times \frac{9 - t^2}{18}\,dt = \frac{1}{18}\left[\frac{9t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\right]_0^3 = \frac{1}{18}\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) = \frac{1}{18} \times \frac{81}{4} = \frac{9}{8} = 1{,}125$ h, soit 67,5 min (1 h 7 min 30 s). $P(T > 2) = 1 - F(2) = 1 - \left(1 - \dfrac{8}{54}\right) = \dfrac{8}{54} = \dfrac{4}{27} \approx 0{,}148$. (0,5 pt pour l'espérance, 0,5 pt pour la probabilité) (1)

d) Chaque intervention est une épreuve de succès « elle dure plus de 2 h », de probabilité $\dfrac{4}{27}$; les 10 épreuves sont identiques et indépendantes : L suit $\mathcal{B}\left(10\,;\dfrac{4}{27}\right)$. $P(L \geqslant 2) = 1 - P(L = 0) - P(L = 1) = 1 - \left(\dfrac{23}{27}\right)^{10} - 10 \times \dfrac{4}{27} \times \left(\dfrac{23}{27}\right)^{9} \approx 1 - 0{,}201 - 0{,}350 = 0{,}449$. $E(L) = 10 \times \dfrac{4}{27} = \dfrac{40}{27} \approx 1{,}48$. (0,5 pt pour la probabilité, 0,5 pt pour l'espérance) (1)

Erreur fréquente — La fonction de répartition s'obtient en intégrant la densité à partir du début de l'intervalle : on contrôle $F(0) = 0$ et $F(3) = 1$ avant de s'en servir.

Exercice 5 – Problème — Des putts au golf *(4 pts)*

a) $\overline{x} = \dfrac{21}{6} = 3{,}5$ et $\overline{y} = \dfrac{88+71+56+42+30+19}{6} = \dfrac{306}{6} = 51$: $G(3{,}5\,;51)$. $r \approx -0{,}997$: $|r|$ est très proche de 1 et $r < 0$, les points sont presque alignés sur une droite décroissante ; un ajustement affine est justifié. (0,5 pt pour G, 0,5 pt pour r commenté) (1)

b) $y = -13{,}77x + 99{,}20$. Contrôle : $-13{,}77 \times 3{,}5 + 99{,}20 \approx 51{,}0$, la droite passe bien par G. Selon ce modèle, chaque mètre supplémentaire fait baisser le pourcentage de réussite d'environ 13,8 points. (0,5 pt pour l'équation, 0,5 pt pour l'interprétation) (1)

c) $y = -13{,}77 \times 2{,}5 + 99{,}20 \approx 64{,}8$: environ 65 % de putts réussis. C'est une interpolation, car $2{,}5 \in [1\,;6]$. (0,5 pt pour l'estimation, 0,5 pt pour la nature) (1)

d) D'après c), $p = 0{,}65$; X suit $\mathcal{B}(10\,;0{,}65)$: 10 épreuves identiques et indépendantes, de succès « le putt est réussi ». À la calculatrice, $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5) \approx 1 - 0{,}249 = 0{,}751$. $E(X) = 10 \times 0{,}65 = 6{,}5$ putts réussis en moyenne. (0,5 pt pour la probabilité, 0,5 pt pour l'espérance) (1)

Méthode — Pour passer d'un ajustement à une probabilité, j'estime d'abord une fréquence par interpolation, puis je l'utilise comme paramètre p d'une loi binomiale ; une extrapolation lointaine pourrait donner une « probabilité » négative.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).