Corrigé et barème – Lois de probabilité et statistique à deux variables — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) $P(X=2) = \binom{8}{2} \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^6 = 28 \times 0{,}09 \times 0{,}117\,649 \approx 0{,}296$. (0,5 pt pour la formule avec $\binom{8}{2}=28$, 0,5 pt pour la valeur) (1)

b) $\{Y=3\}$: deux échecs puis un succès, donc $P(Y=3) = 0{,}75^2 \times 0{,}25 = 0{,}140\,625$. $E(Y) = \dfrac{1}{0{,}25} = 4$: en moyenne, le premier succès arrive à la quatrième épreuve. (0,5 pt pour la probabilité, 0,5 pt pour l'espérance) (1)

c) La probabilité est un rapport de longueurs : $P(U \geqslant 9{,}5) = \dfrac{12-9{,}5}{12-2} = \dfrac{2{,}5}{10} = 0{,}25$. $E(U) = \dfrac{2+12}{2} = 7$. (0,5 pt pour la probabilité, 0,5 pt pour l'espérance) (1)

d) $P(Z>3) = \mathrm{e}^{-0{,}5\times 3} = \mathrm{e}^{-1{,}5} \approx 0{,}223$. $E(Z) = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$. (0,5 pt pour la probabilité, 0,5 pt pour l'espérance) (1)

e) $\overline{x} = \dfrac{2+4+6+8}{4} = 5$ et $\overline{y} = \dfrac{5+9+10+16}{4} = \dfrac{40}{4} = 10$, donc $G(5\,;10)$. La droite des moindres carrés passe par G : $b = \overline{y} - a\,\overline{x} = 10 - 1{,}7\times 5 = 1{,}5$, soit $y = 1{,}7x + 1{,}5$. (0,5 pt pour G, 0,5 pt pour b) (1)

Méthode — Devant une question de probabilité, je nomme d'abord la loi et ses paramètres ; la formule à appliquer en découle : binomiale, géométrique, uniforme ou exponentielle.

Exercice 2 – Problème — Des bols en céramique *(5 pts)*

a) Pour chaque bol, l'épreuve a deux issues ; le succès « le bol est défectueux » a pour probabilité $p = 0{,}06$. Les 20 épreuves sont identiques et indépendantes (tirages assimilés à des tirages avec remise) : c'est un schéma de Bernoulli, et X compte les succès. Donc X suit $\mathcal{B}(20\,;0{,}06)$. (0,5 pt pour le schéma de Bernoulli justifié, 0,5 pt pour les paramètres) (1)

b) $P(X=0) = 0{,}94^{20} \approx 0{,}290$. Puis $P(X=1) = 20 \times 0{,}06 \times 0{,}94^{19} \approx 0{,}370$, donc $P(X \leqslant 1) \approx 0{,}660$ et $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}340$ (calcul mené avec les valeurs non arrondies). (0,5 pt pour chaque probabilité) (1)

c) $E(X) = np = 20 \times 0{,}06 = 1{,}2$: sur un grand nombre de prélèvements de 20 bols, on trouve en moyenne 1,2 bol défectueux par prélèvement. (0,5 pt pour le calcul, 0,5 pt pour l'interprétation) (1)

d) Chaque examen est une épreuve de Bernoulli de succès « le bol est défectueux », de probabilité 0,06, répétée de façon identique et indépendante, et Y est le rang du premier succès : Y suit $\mathcal{G}(0{,}06)$. $E(Y) = \dfrac{1}{0{,}06} = \dfrac{50}{3} \approx 16{,}7$: en moyenne, il faut examiner environ 17 bols pour trouver le premier bol défectueux. (0,5 pt pour la loi justifiée, 0,5 pt pour l'espérance interprétée) (1)

e) $P(Y > 20) = 0{,}94^{20} \approx 0{,}290$. En effet, $\{Y > 20\}$ signifie que les 20 premiers bols examinés sont tous sans défaut : c'est l'événement « aucun bol défectueux parmi 20 », c'est-à-dire $\{X = 0\}$ pour un lot de 20 bols. (0,5 pt pour le calcul, 0,5 pt pour l'explication) (1)

Erreur fréquente — Binomiale ou géométrique ? Si le nombre de bols est fixé, on compte les défauts : loi binomiale, valeurs de 0 à n. Si l'on s'arrête au premier défaut, on note son rang : loi géométrique, valeurs $1, 2, 3, \ldots$

Exercice 3 – Problème — La durée d'un trajet en tramway *(5 pts)*

a) La densité est la fonction constante égale à $\dfrac{1}{20-12} = \dfrac{1}{8}$ sur $[12\,;20]$, nulle ailleurs. $P(T \leqslant 15) = P(12 \leqslant T \leqslant 15) = \dfrac{15-12}{8} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$. (0,5 pt pour la densité, 0,5 pt pour la probabilité) (1)

b) Elle arrive en classe $T + 2$ minutes après 7 h 42 ; elle est en retard si $42 + T + 2 > 60$, soit $T > 16$. $P(T > 16) = \dfrac{20-16}{8} = \dfrac{4}{8} = 0{,}5$. (0,5 pt pour la traduction $T > 16$, 0,5 pt pour la valeur) (1)

c) $E(T) = \dfrac{12+20}{2} = 16$ min. $V(T) = \dfrac{(20-12)^2}{12} = \dfrac{64}{12} = \dfrac{16}{3} \approx 5{,}33$ et $\sigma(T) = \sqrt{\dfrac{16}{3}} \approx 2{,}31$ min. (0,5 pt pour l'espérance, 0,5 pt pour la variance et l'écart type) (1)

d) Pour $d \in [12\,;20]$, $P(T \leqslant d) = \dfrac{d-12}{8} = 0{,}9 \iff d - 12 = 7{,}2 \iff d = 19{,}2$ min : neuf trajets sur dix durent au plus 19,2 min. En partant à 7 h m, elle est à l'heure si $m + T + 2 \leqslant 60$, soit $T \leqslant 58 - m$; il faut $58 - m = 19{,}2$, d'où $m = 38{,}8$: elle doit prendre le tramway au plus tard à 7 h 38 min 48 s. (0,5 pt pour d, 0,5 pt pour l'heure) (1)

e) Chaque jour, « le trajet dure plus de 18 min » est un succès de probabilité $P(T > 18) = \dfrac{20-18}{8} = 0{,}25$; les 5 jours sont des épreuves identiques et indépendantes, et N compte les succès : N suit $\mathcal{B}(5\,;0{,}25)$. $P(N \geqslant 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - 0{,}75^5 \approx 1 - 0{,}237 = 0{,}763$. (0,5 pt pour la loi, 0,5 pt pour la probabilité) (1)

Méthode — Une heure d'arrivée se traduit en inégalité sur T, en minutes, avant tout calcul : arriver au plus tard à 8 h 00 en partant à 7 h 42, avec 2 minutes de marche, c'est $42 + T + 2 \leqslant 60$, soit $T \leqslant 16$.

Exercice 4 – Problème — L'attente au téléphone *(5 pts)*

a) $\overline{x} = \dfrac{1+2+3+5+7+8}{6} = \dfrac{26}{6} \approx 4{,}33$ et $\overline{y} = \dfrac{1{,}1+1{,}7+2{,}7+4{,}3+5{,}9+6{,}6}{6} = \dfrac{22{,}3}{6} \approx 3{,}72$: $G(4{,}33\,;3{,}72)$. (0,5 pt pour chaque coordonnée) (1)

b) $r \approx 0{,}999$. r est positif et très proche de 1 : les points sont presque alignés sur une droite croissante, un ajustement affine est justifié. (0,5 pt pour la valeur, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

c) La calculatrice donne $y = 0{,}80x + 0{,}24$ (contrôle : $0{,}80 \times 4{,}33 + 0{,}24 \approx 3{,}70$, proche de $\overline{y}$). Selon ce modèle, chaque appel déjà en attente allonge l'attente moyenne d'environ 0,8 min, soit 48 s. (0,5 pt pour l'équation, 0,5 pt pour l'interprétation) (1)

d) $y = 0{,}80 \times 6 + 0{,}24 = 5{,}04$, soit environ 5 min ; c'est une interpolation, car $6 \in [1\,;8]$. Alors $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 5$, donc $\lambda = 0{,}2$, et $P(T > 10) = \mathrm{e}^{-0{,}2\times 10} = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135$. (0,5 pt pour l'estimation et λ, 0,5 pt pour la probabilité) (1)

e) $P(3 \leqslant T \leqslant 8) = \mathrm{e}^{-0{,}2\times 3} - \mathrm{e}^{-0{,}2\times 8} = \mathrm{e}^{-0{,}6} - \mathrm{e}^{-1{,}6} \approx 0{,}548\,8 - 0{,}201\,9 \approx 0{,}347$. (0,5 pt pour la formule, 0,5 pt pour la valeur) (1)

Astuce — Pour une loi exponentielle, l'énoncé donne souvent la durée moyenne plutôt que le paramètre : on retrouve λ en prenant l'inverse de l'espérance, $\lambda = \dfrac{1}{E(T)}$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).