Devoir surveillé – Limites, dérivation, logarithme népérien et convexité — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Démontrer avec la concavité du logarithme *(5 pts)*

a) Justifier que la fonction ln est concave sur $]0\,;+\infty[$. Soit $a>0$: déterminer une équation de la tangente T_a à la courbe de ln au point d'abscisse a, et en déduire que, pour tous réels $x>0$ et $a>0$, $\ln x \leqslant \dfrac{x}{a} + \ln a - 1$.

b) En choisissant convenablement x et a, démontrer que $\dfrac{1}{2} \leqslant \ln 2 \leqslant \dfrac{2}{e}$.

c) Soit a et b deux réels strictement positifs et distincts. En utilisant la corde qui joint les points de la courbe de ln d'abscisses a et b, démontrer que $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{\ln a + \ln b}{2}$, puis que $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

d) On pose $\varphi(x) = \ln x - \dfrac{x-1}{2}$ pour $x>0$. Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ a exactement deux solutions : le nombre 1 et un réel β, que l'on encadrera à 10^{-2} près.

e) Interpréter graphiquement la question d) : que représente la droite D d'équation $y = \dfrac{x-1}{2}$ pour la courbe de ln ? Donner, en justifiant, le signe de $\varphi(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ et la position de la courbe de ln par rapport à D.

Exercice 2 – Problème — Deux cagnottes en ligne *(5 pts)*

Deux associations lancent le même jour une cagnotte en ligne pour 10 semaines. Les sommes collectées, en milliers d'euros, t semaines après le lancement, sont modélisées pour $t \in [0\,;10]$ par $A(t) = 0{,}5\,e^{0{,}3t}$ (cagnotte A, portée par le bouche-à-oreille) et $B(t) = 2 + 3\ln(t+1)$ (cagnotte B, lancée avec un premier don de 2 000 €). On pose $d(t) = A(t) - B(t)$.

a) Étudier les variations et la convexité de A et de B sur $[0\,;10]$. Décrire en une phrase l'évolution de chaque cagnotte.

b) Calculer $d'(t)$ et $d''(t)$. En déduire que d' est strictement croissante sur $[0\,;10]$, puis que l'équation $d'(t)=0$ a une unique solution γ dans $[0\,;10]$; donner un encadrement de γ d'amplitude $0{,}1$.

c) Dresser le tableau de variations de d sur $[0\,;10]$. Démontrer que l'équation $A(t)=B(t)$ a une unique solution t_0 dans $[0\,;10]$, et en donner un encadrement d'amplitude $0{,}01$.

d) Interpréter t_0. À quel instant l'avance de la cagnotte B sur la cagnotte A est-elle la plus grande ? Donner cette avance à la dizaine d'euros près, et comparer les rythmes de collecte des deux cagnottes à cet instant.

e) Pour aller plus loin. On remplace la cagnotte A par une cagnotte C, avec $C(t) = c\,e^{0{,}3t}$ et $c>0$. Déterminer la valeur exacte c^{*} de c pour laquelle les cagnottes C et B atteignent la même somme à $t=10$. Avec $c=c^{*}$, démontrer que la cagnotte C est en retard sur la cagnotte B pour tout $t \in [0\,;10[$.

Exercice 3 – Vrai ou faux ? *(5 pts)*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis le démontrer : une démonstration si elle est vraie, un contre-exemple si elle est fausse.

a) « La courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ admet une seule asymptote horizontale. »

b) « Si f est convexe et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors, pour tous réels $a < b$: $f'(a) \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'(b)$. »

c) « Si u est une fonction strictement positive, deux fois dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $\ln u$ est convexe sur $\mathbb{R}$. »

d) « Parmi toutes les tangentes à la courbe de la fonction ln, une seule passe par l'origine du repère. »

e) « Si f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $f''(x) > 0$ pour tout réel x, alors l'équation $f(x) = 0$ a au plus deux solutions. »

Exercice 4 – Problème — Deux contrats de travail *(5 pts)*

Une ingénieure se voit proposer deux contrats, avec le même salaire annuel de $32\,000$ € la première année (année 0). Contrat A : le salaire augmente de $4\,\%$ par an. Contrat B : le salaire augmente de $2\,000$ € par an. On note a_n et b_n les salaires annuels de l'année n et, pour tout réel $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = 32\,000\,e^{x \ln 1{,}04} - 32\,000 - 2\,000x$.

a) Justifier que $a_n - b_n = f(n)$ pour tout entier naturel n. Étudier la convexité de f sur $[0\,;+\infty[$, puis calculer $f'(0)$ et interpréter son signe.

b) Déterminer la valeur exacte du réel x_1 en lequel f' s'annule, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;30]$.

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0\,;+\infty[$, et en donner un encadrement d'amplitude $0{,}1$.

d) À partir de quelle année n le salaire du contrat A dépasse-t-il celui du contrat B ? Vérifier avec les valeurs de a_n et b_n.

e) Pour aller plus loin. On remplace l'augmentation de $4\,\%$ par une augmentation de $t\,\%$ par an ($t > 0$), le contrat B restant le même. Déterminer le plus petit taux t, au dixième, pour lequel le salaire A de l'année 20 est au moins égal au salaire B de la même année. Démontrer qu'alors le contrat A reste au moins aussi avantageux toutes les années suivantes.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).