Corrigé et barème – Limites, dérivation, logarithme népérien et convexité — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Exercice 1 – Démontrer avec la concavité du logarithme *(5 pts)*

a) $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$: ln est concave sur $]0\,;+\infty[$. $T_a : y = \dfrac{1}{a}(x-a) + \ln a$, soit $y = \dfrac{x}{a} + \ln a - 1$. La courbe d'une fonction concave est au-dessous de chacune de ses tangentes : pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant \dfrac{x}{a} + \ln a - 1$. (0,5 pt pour la concavité et la tangente, 0,5 pt pour l'inégalité) (1)

b) Avec $x = 2$ et $a = e$: $\ln 2 \leqslant \dfrac{2}{e} + 1 - 1 = \dfrac{2}{e}$. Avec $x = \dfrac{1}{2}$ et $a = 1$: $\ln\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} - 1$, soit $-\ln 2 \leqslant -\dfrac{1}{2}$, donc $\ln 2 \geqslant \dfrac{1}{2}$ (on peut aussi prendre $x = 2$ et $a = 4$). Ainsi $0{,}5 \leqslant \ln 2 \leqslant \dfrac{2}{e} \approx 0{,}736$, ce qui est cohérent avec $\ln 2 \approx 0{,}693$. (0,5 pt par inégalité) (1)

c) Soit $A(a\,;\ln a)$ et $B(b\,;\ln b)$. Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{a+b}{2}\,;\,\dfrac{\ln a + \ln b}{2}\right)$, et son abscisse est comprise entre a et b. ln étant concave, sa courbe est au-dessus de la corde $[AB]$ entre A et B ; en l'abscisse $\dfrac{a+b}{2}$: $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{\ln a + \ln b}{2}$. Or $\dfrac{\ln a + \ln b}{2} = \dfrac{1}{2}\ln(ab) = \ln\sqrt{ab}$; ln étant strictement croissante, $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ (l'égalité est évidente si $a = b$). (0,5 pt pour la position par rapport à la corde, 0,5 pt pour le passage à $\sqrt{ab}$) (1)

d) $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2-x}{2x}$, du signe de $2 - x$: φ est strictement croissante sur $]0\,;2]$ et strictement décroissante sur $[2\,;+\infty[$. Sur $]0\,;2]$: $\varphi(1) = 0$, et la stricte monotonie interdit une autre solution. Sur $\left[2\,;e^2\right]$: φ est continue, strictement décroissante, $\varphi(2) = \ln 2 - \dfrac{1}{2} \approx 0{,}19 > 0$ (l'inégalité large de la question b ne suffit pas pour le signe strict) et $\varphi\left(e^2\right) = 2 - \dfrac{e^2-1}{2} = \dfrac{5-e^2}{2} < 0$: une unique solution β (corollaire du TVI). Sur $\left[e^2\,;+\infty\right[$, $\varphi(x) \leqslant \varphi\left(e^2\right) < 0$: aucune. À la calculatrice : $\varphi(3{,}51) \approx 0{,}000\,6 > 0$ et $\varphi(3{,}52) \approx -0{,}001\,5 < 0$, donc $3{,}51 < \beta < 3{,}52$. (0,5 pt pour l'étude de φ et les deux solutions, 0,5 pt pour l'encadrement) (1)

e) D passe par les points $(1\,;0)$ et $(\beta\,;\ln\beta)$ de la courbe de ln (car $\varphi(1) = \varphi(\beta) = 0$) : c'est une sécante, et le segment qui joint ces deux points est une corde. D'après l'étude de d) : φ croît strictement sur $]0\,;2]$ et s'annule en 1, décroît strictement sur $[2\,;+\infty[$ et s'annule en β. Donc $\varphi(x) < 0$ sur $]0\,;1[$, $\varphi(x) > 0$ sur $]1\,;\beta[$ et $\varphi(x) < 0$ sur $]\beta\,;+\infty[$. La courbe de ln est au-dessus de D entre les deux points d'intersection, comme l'annonce la concavité (au-dessus de ses cordes), et au-dessous de D en dehors. (0,5 pt pour la sécante, 0,5 pt pour le signe et la position) (1)

Astuce — Une fonction concave donne des inégalités sans étude de fonction : sa courbe est au-dessous de ses tangentes et au-dessus de ses cordes. Bien choisir le point de tangence donne un encadrement précis.

Exercice 2 – Problème — Deux cagnottes en ligne *(5 pts)*

a) $A'(t) = 0{,}5 \times 0{,}3\,e^{0{,}3t} = 0{,}15\,e^{0{,}3t} > 0$ et $A''(t) = 0{,}045\,e^{0{,}3t} > 0$: A est croissante et convexe, la cagnotte A se remplit de plus en plus vite. $B'(t) = \dfrac{3}{t+1} > 0$ et $B''(t) = -\dfrac{3}{(t+1)^2} < 0$: B est croissante et concave, la cagnotte B se remplit de moins en moins vite. (0,5 pt par cagnotte) (1)

b) $d'(t) = 0{,}15\,e^{0{,}3t} - \dfrac{3}{t+1}$ et $d''(t) = 0{,}045\,e^{0{,}3t} + \dfrac{3}{(t+1)^2} > 0$: d' est strictement croissante sur $[0\,;10]$ (et d est convexe). d' est continue, $d'(0) = 0{,}15 - 3 = -2{,}85 < 0$ et $d'(10) = 0{,}15\,e^{3} - \dfrac{3}{11} \approx 2{,}74 > 0$: d'après le corollaire du TVI, $d'(t) = 0$ a une unique solution γ dans $[0\,;10]$. $d'(4{,}3) \approx -0{,}021 < 0$ et $d'(4{,}4) \approx 0{,}006 > 0$, donc $4{,}3 < \gamma < 4{,}4$. (0,5 pt pour d', d'' et la monotonie de d', 0,5 pt pour γ) (1)

c) $d'(t) < 0$ sur $[0\,;\gamma[$ et $d'(t) > 0$ sur $]\gamma\,;10]$: d décroît strictement sur $[0\,;\gamma]$, puis croît strictement sur $[\gamma\,;10]$, avec $d(0) = 0{,}5 - 2 = -1{,}5$ et $d(10) = 0{,}5\,e^{3} - 2 - 3\ln 11 \approx 0{,}85$. Sur $[0\,;\gamma]$, $d(t) \leqslant d(0) < 0$: pas de solution. Sur $[\gamma\,;10]$, d est continue et strictement croissante, avec $d(\gamma) < d(0) < 0 < d(10)$: une unique solution t_0. $d(9{,}67) \approx -0{,}006 < 0$ et $d(9{,}68) \approx 0{,}018 > 0$, donc $9{,}67 < t_0 < 9{,}68$. (0,5 pt pour le tableau et l'unicité, 0,5 pt pour l'encadrement) (1)

d) La cagnotte A, d'abord en retard, rattrape la cagnotte B au bout d'environ 9,67 semaines, puis la dépasse. L'avance de B sur A vaut $B(t) - A(t) = -d(t)$: elle est maximale quand d est minimale, c'est-à-dire en $\gamma \approx 4{,}38$ semaines, et vaut alors $-d(\gamma) \approx 5{,}19$ milliers d'euros, soit environ 5 190 €. En γ, $d'(\gamma) = 0$, donc $A'(\gamma) = B'(\gamma) \approx 0{,}56$ millier d'euros par semaine : les deux cagnottes collectent alors au même rythme, environ 560 € par semaine ; avant, B collecte plus vite que A, après, c'est A. (0,5 pt pour t_0 et l'instant γ, 0,5 pt pour l'avance et les rythmes) (1)

e) $C(10) = B(10) \iff c\,e^{3} = 2 + 3\ln 11 \iff c^{*} = (2 + 3\ln 11)\,e^{-3} \approx 0{,}458$. Soit $\delta(t) = C(t) - B(t)$: $\delta''(t) = 0{,}09\,c^{*}e^{0{,}3t} + \dfrac{3}{(t+1)^2} > 0$, donc δ' est strictement croissante, avec $\delta'(0) = 0{,}3c^{*} - 3 < 0$. Si δ' restait négative, δ serait décroissante et $\delta(10) \leqslant \delta(0) = c^{*} - 2 < 0$, ce qui contredit $\delta(10) = 0$. Comme en b), δ décroît donc puis croît strictement : sur la partie décroissante, $\delta(t) \leqslant \delta(0) < 0$; sur la partie croissante, $\delta(t) < \delta(10) = 0$ pour $t < 10$. Donc $C(t) < B(t)$ sur $[0\,;10[$: la cagnotte C ne rejoint B qu'au bout des 10 semaines. (Autre méthode : δ est convexe, donc au-dessous de sa corde entre $(0\,;\delta(0))$ et $(10\,;0)$.) (0,5 pt pour c^{*}, 0,5 pt pour la démonstration) (1)

Méthode — Pour comparer deux fonctions, j'étudie leur différence. Si sa dérivée seconde garde un signe constant, sa dérivée est monotone : il suffit alors de compter les solutions flèche par flèche.

Exercice 3 – Vrai ou faux ? *(5 pts)*

a) Faux : elle en a deux. En $-\infty$: $e^x \to 0$, donc $f(x) \to \dfrac{0-1}{0+1} = -1$. En $+\infty$: forme $\dfrac{\infty}{\infty}$; en divisant par $e^x > 0$, $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$, avec $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} \to 0$, donc $f(x) \to 1$. Les droites d'équations $y = -1$ (en $-\infty$) et $y = 1$ (en $+\infty$) sont asymptotes horizontales. (0,5 pt par limite) (1)

b) Vrai. f est convexe, donc sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes. Tangente en a, prise en b : $f(b) \geqslant f(a) + f'(a)(b-a)$; comme $b-a>0$, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant f'(a)$. Tangente en b, prise en a : $f(a) \geqslant f(b) + f'(b)(a-b)$, soit $f(b)-f(a) \leqslant f'(b)(b-a)$, d'où $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b)$. La pente de la corde est comprise entre les pentes des tangentes à ses extrémités. (0,5 pt par inégalité) (1)

c) Faux. Contre-exemple : $u(x) = x^2+3$, strictement positive et convexe ($u''=2>0$). Forme $\ln u$: $g(x) = \ln\left(x^2+3\right)$, $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$, puis $g''(x) = \dfrac{2\left(x^2+3\right) - 2x\times 2x}{\left(x^2+3\right)^2} = \dfrac{6-2x^2}{\left(x^2+3\right)^2}$. Pour $|x| > \sqrt{3}$, $g''(x) < 0$: g y est concave, donc pas convexe sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt pour le contre-exemple, 0,5 pt pour le calcul de g'') (1)

d) Vrai. La tangente au point d'abscisse $a>0$ a pour équation $y = \dfrac{1}{a}(x-a) + \ln a$, soit $y = \dfrac{x}{a} + \ln a - 1$. Elle passe par l'origine si et seulement si $\ln a - 1 = 0$, c'est-à-dire $a = e$. Il y a donc une seule telle tangente : $y = \dfrac{x}{e}$, au point $(e\,;1)$. (0,5 pt pour la condition, 0,5 pt pour l'unicité) (1)

e) Vrai. $f'' > 0$, donc f' est strictement croissante et s'annule au plus une fois. Si $f'(c)=0$: $f'<0$ avant c et $f'>0$ après, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;c]$ et strictement croissante sur $[c\,;+\infty[$; elle s'annule au plus une fois sur chacun, donc au plus deux fois. Si f' ne s'annule pas : f' est continue (car dérivable), donc de signe constant d'après le TVI ; f est strictement monotone et s'annule au plus une fois. Deux solutions sont possibles (x^2-1), aucune aussi (e^x). (0,5 pt pour le cas où f' s'annule, 0,5 pt pour l'autre cas) (1)

Erreur fréquente — La concavité de ln ne passe pas à $\ln u$: on recalcule $(\ln u)''$. Et « au plus deux solutions » se démontre en découpant en intervalles de stricte monotonie, jamais sur un simple dessin.

Exercice 4 – Problème — Deux contrats de travail *(5 pts)*

a) $a_n = 32\,000 \times 1{,}04^n = 32\,000\left(e^{\ln 1{,}04}\right)^n = 32\,000\,e^{n\ln 1{,}04}$ et $b_n = 32\,000 + 2\,000n$, d'où $a_n - b_n = f(n)$. $f'(x) = 32\,000\ln 1{,}04\,e^{x\ln 1{,}04} - 2\,000$ et $f''(x) = 32\,000\,(\ln 1{,}04)^2\,e^{x\ln 1{,}04} > 0$: f est convexe. $f'(0) = 32\,000\ln 1{,}04 - 2\,000 \approx -745 < 0$: au début, l'écart $a - b$ diminue, car le rythme de hausse du contrat A (environ 1 255 € par an au départ) est plus faible que 2 000 €. (0,5 pt pour $a_n - b_n$ et la convexité, 0,5 pt pour $f'(0)$ interprété) (1)

b) f' est strictement croissante ($f'' > 0$) et $f'(x) = 0 \iff e^{x\ln 1{,}04} = \dfrac{2\,000}{32\,000\ln 1{,}04} = \dfrac{0{,}062\,5}{\ln 1{,}04} \iff x\ln 1{,}04 = \ln\left(\dfrac{0{,}062\,5}{\ln 1{,}04}\right)$, d'où $x_1 = \dfrac{1}{\ln 1{,}04}\ln\left(\dfrac{0{,}062\,5}{\ln 1{,}04}\right) \approx 11{,}88$.

x	0		x_1		30
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\approx -4\,768$	$\nearrow$	$\approx 11\,789$

(0,5 pt pour x_1 exact, 0,5 pt pour le tableau) (1)

c) Sur $]0\,;x_1]$, f est strictement décroissante et $f(0) = 0$, donc $f(x) < 0$: pas de solution. Sur $[x_1\,;30]$, f est continue, strictement croissante, et $f(x_1) < 0 < f(30)$: une unique solution x_0 (corollaire du TVI). Sur $[30\,;+\infty[$, $f' > f'(x_1) = 0$, donc f est croissante et $f(x) \geqslant f(30) > 0$: pas de solution. À la calculatrice : $f(22{,}1) \approx -65 < 0$ et $f(22{,}2) \approx 35 > 0$, donc $22{,}1 < x_0 < 22{,}2$. (0,5 pt pour l'existence et l'unicité, 0,5 pt pour l'encadrement) (1)

d) D'après c), pour $x > 0$, $f(x) > 0 \iff x > x_0$. Donc $a_n > b_n \iff n > x_0$: le premier entier est $n = 23$. Contrôle : $a_{22} \approx 75\,837$ € $< b_{22} = 76\,000$ € et $a_{23} \approx 78\,871$ € $> b_{23} = 78\,000$ €. Le contrat A ne devient plus avantageux, année par année, qu'à partir de l'année 23. (0,5 pt pour le lien avec x_0, 0,5 pt pour $n = 23$ vérifié) (1)

e) $a_{20} \geqslant b_{20} \iff 32\,000\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^{20} \geqslant 72\,000 \iff \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^{20} \geqslant 2{,}25 \iff 20\ln\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) \geqslant \ln 2{,}25 \iff t \geqslant 100\left(e^{\frac{\ln 2{,}25}{20}} - 1\right) \approx 4{,}14$. Au dixième : 4,1 % ne suffit pas ($1{,}041^{20} \approx 2{,}234 < 2{,}25$), 4,2 % convient ($1{,}042^{20} \approx 2{,}277 \geqslant 2{,}25$) : $t = 4{,}2$. Avec ce taux, $f_t(x) = 32\,000\,e^{x\ln 1{,}042} - 32\,000 - 2\,000x$ est convexe comme en a), $f_t(0) = 0$ et $f_t(20) > 0$. Pour $x > 20$, 20 est compris entre 0 et x : la courbe de f_t est au-dessous de la corde qui joint $(0\,;0)$ et $(x\,;f_t(x))$, donc $f_t(20) \leqslant \dfrac{20}{x}f_t(x)$, d'où $f_t(x) \geqslant \dfrac{x}{20}f_t(20) > 0$. Toutes les années suivantes, A rapporte plus que B. (0,5 pt pour le taux, 0,5 pt pour l'argument de convexité) (1)

Piège — Une fonction convexe nulle en 0 et positive en un réel $a > 0$ reste positive après a : la corde depuis l'origine le garantit. Un pourcentage finit toujours par battre une hausse fixe, mais parfois très tard.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).