Devoir surveillé – Limites, dérivation, logarithme népérien et convexité — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(4 pts)*

a) Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$, puis donner ses variations et son maximum.

b) Justifier que la fonction $g : x \mapsto \ln\left(x^2 + 4x + 7\right)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $g'(x)$ et donner les variations de g.

c) Résoudre l'inéquation $\ln(x+2) - \ln(x-1) \geqslant \ln 4$, après avoir précisé l'ensemble sur lequel elle a un sens.

d) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{3e^x - 1}{e^x + 2}$ et interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier : une démonstration si elle est vraie, un contre-exemple si elle est fausse.

a) « La fonction $x \mapsto x\,e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$. »

b) « L'équation $e^x = 3 - x$ admet une unique solution réelle. »

c) « Une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ admet toujours un minimum. »

d) « Si f est dérivable et concave sur $[0\,;+\infty[$, avec $f(0) = 0$, alors $f(x) \leqslant f'(0)\,x$ pour tout $x \geqslant 0$. »

Exercice 3 – Étude d'une fonction avec deux exponentielles *(4 pts)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 6e^x + 5$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement l'une d'elles.

b) Montrer que $f'(x) = 2e^x\,(e^x - 3)$, puis dresser le tableau de variations de f (avec les limites), en donnant la valeur exacte de son minimum.

c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ (on pourra poser $X = e^x$). Retrouver le nombre de solutions à l'aide du tableau de variations.

d) Étudier la convexité de f. Donner les coordonnées exactes du point d'inflexion I de $\mathcal{C}_f$ et le coefficient directeur de la tangente en I.

Exercice 4 – Problème — La croissance d'un sandre *(4 pts)*

Un jeune sandre est lâché dans un lac. Sa longueur, en cm, t années après son lâcher, est modélisée par $L(t) = 60\,e^{-2e^{-0{,}3t}}$, pour $t \geqslant 0$.

a) Calculer $L(0)$ au millimètre près, puis déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} L(t)$. Interpréter ces deux résultats.

b) Montrer que $L'(t) = 36\,e^{-0{,}3t}\,e^{-2e^{-0{,}3t}}$, puis en déduire le sens de variation de L sur $[0\,;+\infty[$.

c) On admet que $L''(t) = 10{,}8\,e^{-0{,}3t}\left(2e^{-0{,}3t} - 1\right)e^{-2e^{-0{,}3t}}$. Étudier la convexité de L et donner la valeur exacte de l'abscisse t_I du point d'inflexion de sa courbe. Calculer les valeurs exactes de $L(t_I)$ et de $L'(t_I)$, puis interpréter.

d) Dans ce lac, un sandre pêché doit être relâché s'il mesure moins de 45 cm. Justifier que le sandre atteint cette longueur à un unique instant t_V, puis calculer la valeur exacte de t_V et une valeur approchée au centième.

Exercice 5 – Problème — La valeur d'une voiture *(4 pts)*

Une voiture neuve vaut 24 000 €. Selon un barème, elle perd 15 % de sa valeur chaque année. On note v_n sa valeur, en euros, au bout de n années. On modélise aussi sa valeur au bout d'une durée t quelconque (en années, $t \geqslant 0$) par $V(t) = 24\,000\,e^{-kt}$, avec $k = -\ln 0{,}85$.

a) Exprimer v_n en fonction de n, puis déterminer, à l'aide du logarithme, au bout de combien d'années entières la voiture vaut pour la première fois moins de 10 000 €.

b) Vérifier que $V(n) = v_n$ pour tout entier naturel n. Calculer $V'(t)$ et en déduire le sens de variation de V ; donner $V'(0)$ arrondi à l'euro et l'interpréter.

c) Étudier la convexité de V et déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t)$. Interpréter ces deux résultats.

d) Le vendeur affirme : « Avec ce barème, une voiture perd la moitié de sa valeur en moins de 4 ans. » A-t-il raison ? Déterminer ensuite l'instant t_1 à partir duquel la voiture perd de la valeur au rythme de moins de 2 000 € par an (valeur exacte, puis au centième).

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).