Corrigé et barème – Limites, dérivation, logarithme népérien et convexité — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Exercice 1 – Automatismes *(4 pts)*

a) Pour tout réel x, $x^2+1 \geqslant 1 > 0$. Forme e^u avec $u(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et, par la forme $\dfrac{1}{v}$, $u'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$: $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\,e^{\frac{1}{x^2+1}}$. Comme $e^{\frac{1}{x^2+1}} > 0$ et $(x^2+1)^2 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $-2x$: f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$, de maximum $f(0) = e^1 = e$. (0,5 pt pour la dérivée, 0,5 pt pour les variations et le maximum) (1)

b) Le trinôme x^2+4x+7 a pour discriminant $\Delta = 16 - 28 = -12 < 0$ et un coefficient dominant $1 > 0$: il est strictement positif sur $\mathbb{R}$ (on peut aussi écrire $x^2+4x+7 = (x+2)^2 + 3 \geqslant 3$). Forme $\ln u$: $g'(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+4x+7}$, du signe de $2x+4$. g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-2]$, strictement croissante sur $[-2\,;+\infty[$, de minimum $g(-2) = \ln 3$. (0,5 pt pour le domaine justifié, 0,5 pt pour la dérivée et les variations) (1)

c) Conditions : $x+2>0$ et $x-1>0$, soit $x>1$. Sur $]1\,;+\infty[$: $\ln(x+2) - \ln(x-1) = \ln\dfrac{x+2}{x-1}$, et, ln étant strictement croissante, $\ln\dfrac{x+2}{x-1} \geqslant \ln 4 \iff \dfrac{x+2}{x-1} \geqslant 4 \iff x+2 \geqslant 4(x-1)$ (car $x-1>0$) $\iff 6 \geqslant 3x \iff x \leqslant 2$. Avec la condition : $\mathcal{S} =]1\,;2]$. (0,5 pt pour les conditions et le quotient, 0,5 pt pour l'ensemble des solutions) (1)

d) Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. On factorise par $e^x > 0$ en haut et en bas : $\dfrac{3e^x - 1}{e^x + 2} = \dfrac{3 - e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$, avec $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} \to 0$ en $+\infty$. Le numérateur tend vers 3, le dénominateur vers 1 : par quotient, la limite vaut 3. La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$. (0,5 pt pour la factorisation, 0,5 pt pour la limite et l'asymptote) (1)

Astuce — Une forme indéterminée avec des exponentielles se lève comme avec des polynômes : on factorise en haut et en bas par le terme qui l'emporte, ici e^x.

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

a) Faux. Par la dérivée d'un produit : $f'(x) = e^x + x\,e^x = (x+1)e^x$, puis $f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$, du signe de $x+2$ car $e^x > 0$. Sur $]-\infty\,;-2[$, $f''(x) < 0$: la fonction y est concave. Elle n'est convexe que sur $[-2\,;+\infty[$ (point d'inflexion d'abscisse -2). (0,5 pt pour f'', 0,5 pt pour la conclusion) (1)

b) Vrai. Soit $k(x) = e^x + x - 3$: $k'(x) = e^x + 1 > 0$, donc k est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $k(0) = -2 < 0$ et $k(1) = e - 2 \approx 0{,}72 > 0$: d'après le corollaire du TVI, $k(x) = 0$ a une unique solution dans $[0\,;1]$. Hors de cet intervalle, $k(x) < k(0) < 0$ si $x < 0$ et $k(x) > k(1) > 0$ si $x > 1$. L'équation a donc une seule solution réelle (environ 0,79). (0,5 pt pour la stricte croissance, 0,5 pt pour l'existence et l'unicité sur $\mathbb{R}$) (1)

c) Faux. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée seconde e^x est positive), mais elle n'a pas de minimum : pour tout réel a, $e^{a-1} < e^a$, donc aucune valeur e^a n'est la plus petite (les valeurs se rapprochent de 0 en $-\infty$ sans l'atteindre). Une fonction affine non constante est un autre contre-exemple. (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour le contre-exemple justifié) (1)

d) Vrai. f est dérivable et concave sur $[0\,;+\infty[$: sa courbe est au-dessous de chacune de ses tangentes, en particulier de la tangente au point d'abscisse 0, d'équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit $y = f'(0)\,x$. Donc $f(x) \leqslant f'(0)\,x$ pour tout $x \geqslant 0$. Exemple : $f(x) = \ln(1+x)$ vérifie $f(0) = 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $f'(0) = 1$ et $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} < 0$: $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$. (0,5 pt pour la tangente en 0, 0,5 pt pour la position de la courbe) (1)

Piège — Une affirmation « pour tout x » tombe dès qu'un seul intervalle la contredit ; une affirmation « une unique solution » demande les deux moitiés : existence par le TVI, unicité par la stricte monotonie.

Exercice 3 – Étude d'une fonction avec deux exponentielles *(4 pts)*

a) En $-\infty$: $e^x \to 0$ et $e^{2x} = (e^x)^2 \to 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$: la droite d'équation $y = 5$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. En $+\infty$: forme « $+\infty - \infty$ ». On factorise : $f(x) = e^x\,(e^x - 6) + 5$; $e^x \to +\infty$ et $e^x - 6 \to +\infty$, donc, par produit puis par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. (0,5 pt pour la limite en $-\infty$ et l'asymptote, 0,5 pt pour la limite en $+\infty$) (1)

b) $\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$ (forme e^{ax+b}), donc $f'(x) = 2e^{2x} - 6e^x = 2e^x\,(e^x - 3)$. Comme $2e^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $e^x - 3$: négatif si $x < \ln 3$, positif si $x > \ln 3$. $f(\ln 3) = \left(e^{\ln 3}\right)^2 - 6e^{\ln 3} + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$.

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Le minimum de f vaut -4, atteint en $\ln 3$. (0,5 pt pour la dérivée et son signe, 0,5 pt pour le tableau et le minimum) (1)

c) Avec $X = e^x > 0$: $X^2 - 6X + 5 = 0$, $\Delta = 36 - 20 = 16$, d'où $X = 1$ ou $X = 5$, tous deux strictement positifs. $e^x = 1 \iff x = 0$ et $e^x = 5 \iff x = \ln 5$: $\mathcal{S} = \{0\,;\ln 5\}$. Contrôle : sur $]-\infty\,;\ln 3]$, f décroît strictement de 5 (limite non atteinte) à -4, et $0 \in]-4\,;5[$ donne une unique solution ; sur $[\ln 3\,;+\infty[$, f croît strictement de -4 vers $+\infty$: une unique solution. On retrouve deux solutions, avec $0 < \ln 3 < \ln 5$. (0,5 pt pour la résolution, 0,5 pt pour le contrôle par le tableau) (1)

d) $f''(x) = 4e^{2x} - 6e^x = 2e^x\,(2e^x - 3)$, du signe de $2e^x - 3$: négatif si $x < \ln\dfrac{3}{2}$, positif si $x > \ln\dfrac{3}{2}$. f est concave sur $\left]-\infty\,;\ln\dfrac{3}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\ln\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$; f'' change de signe en $\ln\dfrac{3}{2}$. $f\left(\ln\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{4} - 9 + 5 = -\dfrac{7}{4}$, donc $I\left(\ln\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{7}{4}\right)$, et $f'\left(\ln\dfrac{3}{2}\right) = 2\times\dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{3}{2} - 3\right) = -\dfrac{9}{2}$: c'est en I que f décroît le plus vite. (0,5 pt pour la convexité, 0,5 pt pour I et le coefficient directeur) (1)

Méthode — Dès qu'une expression ne contient que e^x et $e^{2x} = (e^x)^2$, je pose $X = e^x$, avec $X > 0$: équation, signe et factorisation deviennent ceux d'un trinôme.

Exercice 4 – Problème — La croissance d'un sandre *(4 pts)*

a) $L(0) = 60\,e^{-2e^{0}} = 60\,e^{-2} \approx 8{,}1$ cm. Quand $t \to +\infty$, $-0{,}3t \to -\infty$, donc $e^{-0{,}3t} \to 0$ et $-2e^{-0{,}3t} \to 0$; comme $\lim\limits_{X \to 0} e^{X} = e^{0} = 1$, $\lim\limits_{t \to +\infty} L(t) = 60$. Le sandre mesure environ 8,1 cm à son lâcher ; sa longueur se rapproche de 60 cm sans l'atteindre (la droite d'équation $y = 60$ est asymptote horizontale). (0,5 pt pour $L(0)$, 0,5 pt pour la limite interprétée) (1)

b) Forme e^{u} avec $u(t) = -2e^{-0{,}3t}$ et $u'(t) = -2 \times (-0{,}3)\,e^{-0{,}3t} = 0{,}6\,e^{-0{,}3t}$: $L'(t) = 60 \times 0{,}6\,e^{-0{,}3t}\,e^{u(t)} = 36\,e^{-0{,}3t}\,e^{-2e^{-0{,}3t}}$. Les deux exponentielles sont strictement positives, donc $L'(t) > 0$: L est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. (0,5 pt pour u' et la dérivée, 0,5 pt pour le sens de variation) (1)

c) $10{,}8\,e^{-0{,}3t} > 0$ et $e^{-2e^{-0{,}3t}} > 0$: $L''(t)$ a le signe de $2e^{-0{,}3t} - 1$. Or $2e^{-0{,}3t} - 1 > 0 \iff e^{-0{,}3t} > \dfrac{1}{2} \iff -0{,}3t > -\ln 2 \iff t < \dfrac{\ln 2}{0{,}3} = \dfrac{10\ln 2}{3}$. L est convexe sur $[0\,;t_I]$ et concave sur $[t_I\,;+\infty[$, avec $t_I = \dfrac{10\ln 2}{3} \approx 2{,}31$ ans ; L'' y change de signe : point d'inflexion. En t_I, $e^{-0{,}3t_I} = \dfrac{1}{2}$, donc $L(t_I) = 60\,e^{-1} = \dfrac{60}{e} \approx 22{,}07$ cm et $L'(t_I) = 36 \times \dfrac{1}{2} \times e^{-1} = \dfrac{18}{e} \approx 6{,}62$ cm par an. L' croît puis décroît : c'est vers 2,3 ans, à environ 22 cm, que le sandre grandit le plus vite (environ 6,6 cm par an), puis de moins en moins vite. (0,5 pt pour la convexité et t_I, 0,5 pt pour les valeurs exactes et l'interprétation) (1)

d) L est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, avec $L(0) \approx 8{,}1 < 45 < 60 = \lim\limits_{t \to +\infty} L(t)$: d'après le corollaire du TVI, $L(t) = 45$ a une unique solution t_V. $L(t) = 45 \iff e^{-2e^{-0{,}3t}} = 0{,}75 \iff -2e^{-0{,}3t} = \ln 0{,}75 \iff e^{-0{,}3t} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$ (car $-\ln 0{,}75 = \ln\dfrac{4}{3} > 0$) $\iff t = -\dfrac{10}{3}\ln\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}\right)$. Donc $t_V = \dfrac{10}{3}\ln\left(\dfrac{2}{\ln(4/3)}\right) \approx 6{,}46$ ans (contrôle : $L(6{,}46) \approx 44{,}99$ et $L(6{,}47) \approx 45{,}03$). (0,5 pt pour l'unicité, 0,5 pt pour la valeur exacte et approchée) (1)

Erreur fréquente — Le point d'inflexion n'est pas le moment où le poisson cesse de grandir : c'est celui où il grandit le plus vite, car L' y passe de croissante à décroissante. La longueur, elle, augmente toujours.

Exercice 5 – Problème — La valeur d'une voiture *(4 pts)*

a) Perdre 15 % revient à multiplier par 0,85 : (v_n) est géométrique de raison 0,85 et $v_n = 24\,000 \times 0{,}85^n$. $v_n < 10\,000 \iff 0{,}85^n < \dfrac{5}{12} \iff n \ln 0{,}85 < \ln \dfrac{5}{12}$ (ln strictement croissante) $\iff n > \dfrac{\ln(5/12)}{\ln 0{,}85}$, car $\ln 0{,}85 < 0$ (le sens change). Or $\dfrac{\ln(5/12)}{\ln 0{,}85} \approx 5{,}39$: c'est au bout de 6 ans. Contrôle : $v_5 \approx 10\,649$ € et $v_6 \approx 9\,052$ €. (0,5 pt pour l'inéquation avec le changement de sens, 0,5 pt pour $n = 6$) (1)

b) $V(n) = 24\,000\, e^{n \ln 0{,}85} = 24\,000 \left(e^{\ln 0{,}85}\right)^n = 24\,000 \times 0{,}85^n = v_n$. Forme e^{at} avec $a = -k$: $V'(t) = -24\,000k\, e^{-kt}$. Comme $k = -\ln 0{,}85 \approx 0{,}162\,5 > 0$, $V'(t) < 0$: V est strictement décroissante. $V'(0) = -24\,000k = 24\,000 \ln 0{,}85 \approx -3\,900$: au moment de l'achat, la voiture perd de la valeur au rythme d'environ 3 900 € par an. (0,5 pt pour la vérification et la dérivée, 0,5 pt pour le sens de variation et $V'(0)$ interprété) (1)

c) $V''(t) = 24\,000k^2\, e^{-kt} > 0$: V est convexe. Sa dérivée V' est croissante, de plus en plus proche de 0 : la voiture perd de la valeur de moins en moins vite. Quand $t \to +\infty$, $-kt \to -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$: $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = 0$. La valeur se rapproche de 0 sans jamais l'atteindre ; l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe. (0,5 pt pour la convexité interprétée, 0,5 pt pour la limite interprétée) (1)

d) La valeur est divisée par 2 à l'instant T tel que $V(T) = 12\,000$: $V(T) = 12\,000 \iff e^{-kT} = \dfrac{1}{2} \iff -kT = -\ln 2 \iff T = \dfrac{\ln 2}{k} = -\dfrac{\ln 2}{\ln 0{,}85} \approx 4{,}27$ ans. Le vendeur a tort : au bout de 4 ans, la voiture vaut encore $24\,000 \times 0{,}85^4 \approx 12\,528$ €, plus de la moitié de son prix. La voiture perd moins de 2 000 € par an quand $V'(t) > -2\,000$, soit $24\,000k\, e^{-kt} < 2\,000 \iff e^{-kt} < \dfrac{1}{12k} \iff -kt < -\ln(12k) \iff t > \dfrac{\ln(12k)}{k}$ (car $k > 0$). Donc $t_1 = \dfrac{\ln(12k)}{k} = \dfrac{\ln(-12 \ln 0{,}85)}{-\ln 0{,}85} \approx 4{,}11$ ans. (0,5 pt pour T et la réponse au vendeur, 0,5 pt pour t_1) (1)

Astuce — Une évolution d'un même pourcentage chaque année s'écrit au choix $0{,}85^n$ ou $e^{n \ln 0{,}85}$: la première forme sert aux seuils, la seconde à dériver et à étudier la convexité.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).