Devoir surveillé – Limites, dérivation, logarithme népérien et convexité — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{9}{4}\right[$ par $f(x)=\ln(9-4x)$.

b) Écrire $A=2\ln 6-\ln 9+\ln 8$ sous la forme $k\ln 2$, avec k entier.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3e^{x}-12<0$.

d) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^{+}}\frac{2+\ln x}{x}$. Que peut-on en déduire pour la courbe de la fonction $x\mapsto\dfrac{2+\ln x}{x}$?

e) Étudier la convexité de la fonction k définie sur $]0\,;+\infty[$ par $k(x)=x^{2}+6\ln x$, et donner l'abscisse du point d'inflexion de sa courbe.

Exercice 2 – Une équation sans formule *(5 pts)*

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x-4+2\ln x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement la limite en 0.

b) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

c) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$, puis que $2<\alpha<3$.

d) Donner, à la calculatrice, un encadrement de α d'amplitude $0{,}01$, puis le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

e) Étudier la convexité de f. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2, puis la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

Exercice 3 – Lire un tableau de variations de la dérivée *(5 pts)*

Une fonction f est deux fois dérivable sur $[-2\,;6]$; on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe. Le tableau ci-dessous donne les variations de sa dérivée f'. On sait de plus que $f'(-1)=0$, $f'(4)=0$, et que $f(-2)=-3$, $f(-1)=-5$, $f(1)=1$, $f(4)=7$ et $f(6)=5$.

x	-2		1		6
$f'(x)$	-3	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2

a) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[-2\,;6]$, puis le tableau de variations de f.

b) Étudier la convexité de f et donner les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

c) Combien la courbe $\mathcal{C}_f$ a-t-elle de tangentes horizontales ? Donner leurs points de contact et leurs équations.

d) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1, puis la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T sur $[-2\,;6]$.

e) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=6$ sur $[-2\,;6]$.

Exercice 4 – Problème — Apprendre du vocabulaire *(5 pts)*

Une élève commence une nouvelle langue avec une application de vocabulaire. Le nombre de mots qu'elle sait utiliser, t semaines après le début, est modélisé par $M(t) = 200\ln(0{,}25t + 1)$, pour $t \geqslant 0$.

a) Calculer $M(0)$, puis $M(12)$ arrondi à l'unité.

b) Montrer que $M'(t) = \dfrac{200}{t+4}$, et en déduire le sens de variation de M sur $[0\,;+\infty[$.

c) Étudier la convexité de M et interpréter le résultat pour l'apprentissage.

d) Au bout de combien de semaines l'élève connaît-elle 600 mots ? Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième.

e) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} M'(t)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} M(t)$. Un camarade affirme : « Puisque le nombre de mots appris par semaine tend vers 0, selon ce modèle, elle ne dépassera jamais un certain nombre de mots. » A-t-il raison ?

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).