# Corrigé et barème – Limites, dérivation, logarithme népérien et convexité — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires Terminale

## Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) Sur cet intervalle, $9-4x>0$. Forme $\ln(ax+b)$ avec $a=-4$ et $b=9$ : $f'(x)=\dfrac{-4}{9-4x}$, que l'on peut aussi écrire $\dfrac{4}{4x-9}$. Comme $9-4x>0$, $f'(x)<0$ : $f$ est strictement décroissante. (0,5 pt pour la forme reconnue, 0,5 pt pour le coefficient $-4$ au numérateur) (1)

b) $2\ln 6=\ln\left(6^2\right)=\ln 36$, donc $A=\ln 36-\ln 9+\ln 8=\ln\dfrac{36\times 8}{9}=\ln 32$. Comme $32=2^5$, $A=5\ln 2$ : $k=5$. (0,5 pt pour le regroupement en un seul logarithme, 0,5 pt pour $k=5$) (1)

c) $3e^x-12<0 \iff e^x<4 \iff x<\ln 4$, car la fonction ln est strictement croissante (et $4>0$). $\mathcal{S}=\,]-\infty\,;\ln 4[$, avec $\ln 4=2\ln 2\approx 1{,}386$. (0,5 pt pour $e^x<4$, 0,5 pt pour l'ensemble des solutions) (1)

d) Quand $x\to 0^+$ : $\ln x\to-\infty$, donc $2+\ln x\to-\infty$ (somme) ; et $\dfrac{1}{x}\to+\infty$. Par produit, $\dfrac{2+\ln x}{x}=(2+\ln x)\times\dfrac{1}{x}\to-\infty$ : ce n'est pas une forme indéterminée. La droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe. (0,5 pt pour la limite justifiée, 0,5 pt pour l'asymptote) (1)

e) $k'(x)=2x+\dfrac{6}{x}$, puis $k''(x)=2-\dfrac{6}{x^2}=\dfrac{2(x^2-3)}{x^2}$. Sur $]0\,;+\infty[$, $x^2>0$ : $k''(x)$ a le signe de $x^2-3$, négatif sur $\left]0\,;\sqrt{3}\right[$ et positif sur $\left]\sqrt{3}\,;+\infty\right[$. Donc $k$ est concave sur $\left]0\,;\sqrt{3}\right]$ et convexe sur $\left[\sqrt{3}\,;+\infty\right[$ ; $k''$ s'annule en changeant de signe en $\sqrt{3}$ : la courbe a un point d'inflexion d'abscisse $\sqrt{3}$. (0,5 pt pour $k''$, 0,5 pt pour la convexité et l'abscisse) (1)

**Méthode** — Avant de calculer, je nomme ce que j'utilise : la forme $\ln(ax+b)$ pour dériver, « par somme » ou « par produit » pour une limite, et le signe de la dérivée seconde, pas celui de la dérivée, pour la convexité.

## Exercice 2 – Une équation sans formule *(5 pts)*

a) En $0^+$ : $x-4 \to -4$ et $2\ln x \to -\infty$ ; par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ : l'axe des ordonnées (droite d'équation $x=0$) est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$. En $+\infty$ : $x-4 \to +\infty$ et $2\ln x \to +\infty$ ; par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée). (0,5 pt pour la limite en 0 et l'asymptote, 0,5 pt pour la limite en $+\infty$) (1)

b) $f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x} = \dfrac{x+2}{x}$. Pour $x>0$, $x+2>0$ et $x>0$, donc $f'(x)>0$ : $f$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. (0,5 pt pour la dérivée, 0,5 pt pour le signe et la conclusion) (1)

c) $f$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, avec $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; 0 est strictement compris entre ces deux limites. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]0\,;+\infty[$. De plus, $f(2) = -2+2\ln 2 \approx -0{,}61 < 0$ et $f(3) = -1+2\ln 3 \approx 1{,}20 > 0$ ; comme $f$ est strictement croissante et $f(\alpha)=0$, on a $2<\alpha<3$. (0,5 pt pour les trois hypothèses du corollaire, 0,5 pt pour l'encadrement) (1)

d) Par balayage à la calculatrice : $f(2{,}31) \approx -0{,}016 < 0$ et $f(2{,}32) \approx 0{,}003 > 0$, donc $2{,}31 < \alpha < 2{,}32$. Comme $f$ est strictement croissante et $f(\alpha)=0$ : $f(x)<0$ sur $]0\,;\alpha[$, $f(\alpha)=0$ et $f(x)>0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$. (0,5 pt pour l'encadrement justifié par les deux images, 0,5 pt pour le signe) (1)

e) $f''(x) = -\dfrac{2}{x^2} < 0$ sur $]0\,;+\infty[$ : $f$ est concave. $f(2) = -2+2\ln 2$ (question c) et $f'(2) = 1+\dfrac{2}{2} = 2$, donc $T : y = 2(x-2) - 2 + 2\ln 2$, soit $y = 2x - 6 + 2\ln 2$. La courbe d'une fonction concave est au-dessous de chacune de ses tangentes : $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $T$ sur $]0\,;+\infty[$, avec un seul point de contact $(2\,;-2+2\ln 2)$. (0,5 pt pour la concavité, 0,5 pt pour la tangente et la position) (1)

**Piège** — Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence ; c'est la stricte croissance qui donne l'unicité. Sur $]0\,;+\infty[$, ce sont les limites $-\infty$ et $+\infty$ qui jouent le rôle de $f(a)$ et $f(b)$.

## Exercice 3 – Lire un tableau de variations de la dérivée *(5 pts)*

a) Sur $[-2\,;1]$, $f'$ est strictement croissante et s'annule en $-1$ : $f'(x)<0$ sur $[-2\,;-1[$ et $f'(x)>0$ sur $]-1\,;1]$. Sur $[1\,;6]$, $f'$ est strictement décroissante et s'annule en $4$ : $f'(x)>0$ sur $[1\,;4[$ et $f'(x)<0$ sur $]4\,;6]$.

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $4$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-3$ | $\searrow$ | $-5$ | $\nearrow$ | $7$ | $\searrow$ | $5$ |

(0,5 pt pour le signe de $f'$, 0,5 pt pour les variations de $f$) (1)

b) $f$ est convexe là où $f'$ est croissante, soit sur $[-2\,;1]$, et concave là où $f'$ est décroissante, soit sur $[1\,;6]$. La convexité change en $1$ : $\mathcal{C}_f$ a un point d'inflexion, le point $(1\,;1)$ car $f(1)=1$. (0,5 pt pour les intervalles, 0,5 pt pour le point d'inflexion) (1)

c) Une tangente est horizontale là où $f'(x)=0$, c'est-à-dire seulement en $-1$ et en $4$ (question a). Il y a donc deux tangentes horizontales : au point $(-1\,;-5)$, d'équation $y=-5$, et au point $(4\,;7)$, d'équation $y=7$. (0,5 pt pour les abscisses, 0,5 pt pour les points et les équations) (1)

d) D'après le tableau, $f'(1)=4$, et $f(1)=1$ : $T$ : $y=4(x-1)+1$, soit $y=4x-3$. Sur $[-2\,;1]$, $f$ est convexe : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $T$. Sur $[1\,;6]$, $f$ est concave : $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $T$. La courbe traverse sa tangente au point d'inflexion. (0,5 pt pour l'équation, 0,5 pt pour la position de chaque côté) (1)

e) Sur $[-2\,;-1]$, $f(x)\leqslant f(-2)=-3<6$ : aucune solution. Sur $[-1\,;4]$, $f$ est continue et strictement croissante de $-5$ à $7$, et $6\in[-5\,;7]$ : une unique solution (corollaire du TVI). Sur $[4\,;6]$, $f$ est continue et strictement décroissante de $7$ à $5$, et $6\in[5\,;7]$ : une unique solution. Elles sont distinctes car $f(4)=7\neq 6$. L'équation $f(x)=6$ a deux solutions sur $[-2\,;6]$. (0,5 pt pour l'étude sur chaque intervalle, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

**Erreur fréquente** — Sur un tableau de $f'$, il y a deux lectures à ne pas mélanger : le signe de $f'$ donne les variations de $f$, et le sens de variation de $f'$ donne la convexité de $f$.

## Exercice 4 – Problème — Apprendre du vocabulaire *(5 pts)*

a) $M(0) = 200\ln 1 = 0$ : au départ, elle ne connaît aucun mot. $M(12) = 200\ln(3+1) = 200\ln 4 \approx 277$ mots. (0,5 pt par valeur) (1)

b) Forme $\ln(at+b)$ avec $a = 0{,}25$ : $M'(t) = 200 \times \dfrac{0{,}25}{0{,}25t+1} = \dfrac{50}{0{,}25t+1} = \dfrac{200}{t+4}$ (on multiplie le numérateur et le dénominateur par 4). Pour $t \geqslant 0$, $t+4 > 0$, donc $M'(t) > 0$ : $M$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. (0,5 pt pour la dérivée, 0,5 pt pour le sens de variation) (1)

c) $M'(t) = 200 \times \dfrac{1}{t+4}$, donc $M''(t) = 200 \times \left(-\dfrac{1}{(t+4)^2}\right) = -\dfrac{200}{(t+4)^2} < 0$ : $M$ est concave sur $[0\,;+\infty[$. Le rythme d'apprentissage $M'$ diminue : l'élève apprend des mots chaque semaine, mais de moins en moins (par exemple $M'(0) = 50$ mots par semaine au début et $M'(46) = 4$ mots par semaine après 46 semaines). (0,5 pt pour $M''$ et la concavité, 0,5 pt pour l'interprétation) (1)

d) $M(t) = 600 \iff \ln(0{,}25t+1) = 3 \iff 0{,}25t+1 = e^3 \iff t = 4\left(e^3-1\right)$. Or $4\left(e^3-1\right) \approx 76{,}34$ : l'élève connaît 600 mots au bout d'environ 76,34 semaines, donc au cours de la $77^{\text{e}}$ semaine (contrôle : $M(76) = 200\ln 20 \approx 599{,}1$ et $M(77) \approx 601{,}6$). (0,5 pt pour la valeur exacte, 0,5 pt pour la valeur approchée) (1)

e) $t+4 \to +\infty$, donc $M'(t) = \dfrac{200}{t+4} \to 0$. Quand $t \to +\infty$, $0{,}25t+1 \to +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} M(t) = +\infty$. Le camarade a tort : selon ce modèle, le nombre de mots dépasse n'importe quelle valeur, mais très lentement (par exemple 1 000 mots au bout de $4\left(e^5-1\right) \approx 590$ semaines, plus de 11 ans). Dans la réalité, ce modèle ne vaut que sur une durée limitée. (0,5 pt pour les deux limites, 0,5 pt pour la réponse argumentée) (1)

**Astuce** — « De moins en moins vite » se lit sur la concavité. Une vitesse qui tend vers 0 ne suffit pas à borner une fonction : ln en est l'exemple type.

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*