# Dérivation : approfondissement

Fiche méthode

(Maths complémentaires Terminale · Fonctions)

## La démarche pour dériver et étudier une fonction

**1. Je fixe l'intervalle** : condition $u(x) > 0$ pour $\ln u$, dénominateur non nul, racine carrée.

**2. Je reconnais la forme** : produit, quotient, $f(ax+b)$, $u^2$, $e^u$, $\ln u$ ; j'écris $u$ et $u'$.

**3. Je dérive puis je factorise** : la forme factorisée sert au signe.

**4. Je conclus** : signe de $f'(x)$, flèches, valeurs exactes, en citant le théorème (« $f'(x) > 0$ sur l'intervalle, donc $f$ y est strictement croissante »).

**Le réflexe —** une dérivée juste sur un mauvais intervalle, ou un tableau dont le signe n'est pas justifié, ne rapporte pas tous les points.

## Cas 1 · Produit, quotient, tangente

**Réflexe —** je reconnais la structure, j'écris u, v, u′, v′ ; tangente : y = f′(a)(x − a) + f(a).

**Exemple.** Questions types : « Calculer $f'(x)$ », « Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse $a$ ». Exemple : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$, tangente en 0.

Quotient avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = x^2+1 > 0$, $v'(x) = 2x$.

$f'(x) = \dfrac{1 \times (x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ : la tangente en 0 a pour équation $y = 1 \times (x-0) + 0$, soit $y = x$.

**Attention —** (uv)′ ≠ u′v′ ; au numérateur du quotient : u′v − uv′, dans cet ordre.

## Cas 2 · Dériver f(ax + b)

**Réflexe —** dérivée de l'extérieur, intérieur recopié, multipliée par a.

**Exemple.** Questions types : « Dériver $e^{ax+b}$, $(ax+b)^n$, $\sqrt{ax+b}$ ». Exemple : $f(x) = (1-3x)^5$ et $g(x) = e^{0{,}5x+2}$.

$f$ : extérieur $x \mapsto x^5$, de dérivée $5x^4$, et $a = -3$ : $f'(x) = -3 \times 5(1-3x)^4 = -15(1-3x)^4$.

$g$ : exponentielle et $a = 0{,}5$ : $g'(x) = 0{,}5\, e^{0{,}5x+2}$.

**Attention —** oublier le facteur a, ou son signe quand a est négatif.

## Cas 3 · Dériver u² et eᵘ

**Réflexe —** j'écris u et u′ ; (u²)′ = 2u′u, (eᵘ)′ = u′eᵘ ; eᵘ > 0 ne compte pas dans le signe.

**Exemple.** Questions types : « Calculer $f'(x)$ en précisant $u$ », « Étudier le sens de variation ». Exemple : $h(x) = e^{x^3}$ et $k(x) = (2x+e^x)^2$.

$h$ : $u(x) = x^3$, $u'(x) = 3x^2$, donc $h'(x) = 3x^2 e^{x^3}$. Ce produit est positif et ne s'annule qu'en 0 : $h$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$k$ : $u(x) = 2x + e^x$, $u'(x) = 2 + e^x$, donc $k'(x) = 2(2+e^x)(2x+e^x)$.

**Attention —** jamais de dérivation « dans » l'exposant ; (u²)′ n'est pas 2u.

## Cas 4 · Dériver ln u

**Réflexe —** condition u(x) > 0 d'abord, puis u′, puis u′/u ; le signe est celui de u′.

**Exemple.** Questions types : « Déterminer l'ensemble de définition », « Calculer $f'(x)$ ». Exemple : $f(x) = \ln(8 - 4x)$.

$8 - 4x > 0 \iff x < 2$ : $f$ est définie et dérivable sur $]-\infty\,;2[$.
$u'(x) = -4$, donc $f'(x) = \dfrac{-4}{8-4x} = -\dfrac{1}{2-x}$.
Sur $]-\infty\,;2[$, $2 - x > 0$, donc $f'(x) < 0$ : $f$ est strictement décroissante.

**Attention —** (ln u)′ = u′/u, pas 1/u ; aucun calcul là où u(x) ≤ 0.

## Cas 5 · Tableau de variations

**Réflexe —** f′ factorisée, facteurs de signe connu écartés, tableau de signes, flèches, valeurs exactes.

**Exemple.** Questions types : « Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations », « En déduire les extremums ». Exemple : $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2x\,e^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x = (x + 3)(x - 1)e^x$.
$e^x > 0$ : $f'(x)$ a le signe du trinôme, positif à l'extérieur des racines $-3$ et $1$, négatif entre elles.
$f$ croît sur $]-\infty\,;-3]$, décroît sur $[-3\,;1]$, croît sur $[1\,;+\infty[$ : maximum local $f(-3) = 6e^{-3} \approx 0{,}30$, minimum local $f(1) = -2e \approx -5{,}44$.

**Attention —** f′(a) = 0 sans changement de signe ne donne pas d'extremum.

### Les pièges

- Facteur oublié : la dérivée de e^(ax + b) est a·e^(ax + b), avec le signe de a.
- On ne dérive pas dans l'exposant : la dérivée de $e^u$ est $u'e^u$, jamais e^(u′).
- $(u^2)' = 2u'u$ : pour $(1 - x)^2$, le facteur $u' = -1$ change le signe.
- (ln u)′ = u′/u, pas 1/u, et seulement là où u(x) > 0.
- f′(a) = 0 ne prouve pas un extremum : il faut un changement de signe de f′.
- Les variations se concluent sur un intervalle ; sur [a ; b], le maximum peut être atteint à une borne.

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*