

Devoir surveillé – Dérivation — approfondissement

Compléments sur la dérivation : dérivées de $f(ax+b)$, de u^2 , e^u et $\ln u$, dérivée seconde et étude des variations (programme de Tle maths complémentaires, BO 2019)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Exercice 1 — Calculs de dérivées

(4 pts)

- a) a) Calculer la dérivée de $f(x) = e^{6x-5}$ sur $\mathbb{R}$.
- b) b) Calculer la dérivée de $g(x) = \ln(7x + 2)$ en précisant l'intervalle d'étude.
- c) c) Calculer la dérivée de $h(x) = (x^2 + 4x)^2$ sur $\mathbb{R}$ et la donner sous forme factorisée.
- d) d) Calculer la dérivée de $k(x) = e^{-x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 – Exercice 2 — Dérivée seconde

(4 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x - 9$.

- a) a) Calculer $f'(x)$.
- b) b) Calculer $f''(x)$ et la factoriser.
- c) c) Résoudre l'équation $f''(x) = 0$.
- d) d) Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire les variations de la fonction f .

Exercice 3 – Exercice 3 — Étude de variations

(4 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0; 8]$ par $f(x) = (x - 6)e^{\frac{x}{2}}$.

- a) a) Montrer que pour tout x de $[0; 8]$, $f'(x) = \frac{x-4}{2}e^{\frac{x}{2}}$.
- b) b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; 8]$.
- c) c) Dresser le tableau de variations de f en indiquant les valeurs exactes de $f(0)$, $f(4)$ et $f(8)$.
- d) d) Donner la valeur exacte du minimum de f , puis son arrondi au centième.

Exercice 4 – Exercice 4 — Dépollution d'un lac

(4 pts)

- a) a) Après un incident, la concentration d'un polluant dans un lac est modélisée par $c(t) = 8 + 12e^{-\frac{t}{5}}$, où t est le nombre de jours écoulés ($0 \leq t \leq 30$) et $c(t)$ la concentration en mg/L.
- b) b) Calculer $c'(t)$ et en déduire les variations de c sur $[0; 30]$.
- c) c) Calculer $c''(t)$, étudier son signe et interpréter le résultat pour la vitesse de dépollution.
- d) d) Montrer que $c(t) > 8$ pour tout t de $[0; 30]$, puis calculer $c(30)$ arrondie au centième.
- e) e) Résoudre l'équation $c(t) = 10$ et donner la solution exacte puis arrondie au centième de jour.

Exercice 5 – Exercice 5 — Un minimum et une erreur à corriger*(4 pts)*

- a) Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x - 2)^2$.
- b) a) Calculer $f'(x)$.
- c) b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de f .
- d) c) En déduire le minimum de f et la valeur de x en laquelle il est atteint (valeur exacte et arrondi au millième).
- e) d) Un élève écrit : « $f'(x) = 2(\ln x - 2)$ ». Expliquer précisément son erreur.

Bon courage !