

Corrigé et barème – Dérivation — approfondissement

Compléments sur la dérivation : dérivées de $f(ax+b)$, de u^2 , e^u et $\ln u$, dérivée seconde et étude des variations (programme de Tle maths complémentaires, BO 2019)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Exercice 1 — Calculs de dérivées

(4 pts)

- a) Forme e^{ax+b} avec $a = 6$: $f'(x) = 6e^{6x-5}$. (1)
- b) g est définie et dérivable pour $7x + 2 > 0$, soit sur l'intervalle $] -2/7 ; +\infty[$, et $g'(x) = \frac{7}{7x+2}$. (1)
- c) Forme u^2 avec $u(x) = x^2 + 4x$ et $u'(x) = 2x + 4$: $h'(x) = 2(2x + 4)(x^2 + 4x) = 4(x + 2)(x^2 + 4x)$. (1)
- d) Forme e^u avec $u(x) = -x^2 + 3$ et $u'(x) = -2x$: $k'(x) = -2xe^{-x^2+3}$. (1)

Erreur fréquente — Dans les quatre cas, la dérivée de l'intérieur doit apparaître en facteur : c'est elle que l'on oublie le plus souvent.

Exercice 2 – Exercice 2 — Dérivée seconde

(4 pts)

- a) Énoncé : fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. (1)
- b) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2$. (1)
- c) $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$. (1)
- d) $f''(x) = 0$ pour $x = 0$ ou $x = 2$; et f'' est un trinôme de coefficient dominant $12 > 0$, donc négatif entre les racines et positif à l'extérieur : f' est croissante sur $] -\infty ; 0]$, décroissante sur $[0 ; 2]$, croissante sur $[2 ; +\infty[$ (par exemple $f''(3) = 36 > 0$). (1)

Le point clé — Le signe de f'' renseigne sur les variations de f' , pas sur celles de f .

Exercice 3 – Exercice 3 — Étude de variations

(4 pts)

- a) Énoncé de l'exercice. (1)
- b) Produit uv avec $u(x) = x - 6$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^{x/2}$, $v'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$: $f'(x) = e^{x/2} + (x - 6) \times \frac{1}{2}e^{x/2} = e^{x/2} \times \frac{2+x-6}{2} = \frac{x-4}{2}e^{x/2}$. (1)
- c) Comme $e^{x/2} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x - 4$: négatif sur $[0 ; 4[$, nul en 4, positif sur $]4 ; 8]$. (1)
- d) f décroît sur $[0 ; 4]$ puis croît sur $[4 ; 8]$, avec $f(0) = -6$, $f(4) = -2e^2$ et $f(8) = 2e^4$; le minimum vaut $-2e^2 \approx -14,78$. (1)

Repère — Une exponentielle est toujours strictement positive : elle se met en facteur et ne change jamais le signe de la dérivée.

Exercice 4 – Exercice 4 — Dépollution d'un lac

(4 pts)

- a) Énoncé de l'exercice. (0,8)
- b) $c'(t) = 12 \times (-\frac{1}{5})e^{-t/5} = -2,4 e^{-t/5}$, strictement négative car l'exponentielle est positive : c est strictement décroissante sur $[0 ; 30]$. (0,8)
- c) $c''(t) = -2,4 \times (-\frac{1}{5})e^{-t/5} = 0,48 e^{-t/5} > 0$: c' est croissante, donc se rapproche de 0. La concentration diminue de moins en moins vite : la dépollution ralentit. (0,8)
- d) Pour tout t , $12e^{-t/5} > 0$ donc $c(t) > 8$: la concentration reste au-dessus de 8 mg/L. $c(30) = 8 + 12e^{-6} \approx 8,03$. (0,8)
- e) $c(t) = 10$ donne $12e^{-t/5} = 2$, soit $e^{-t/5} = \frac{1}{6}$, soit $-\frac{t}{5} = -\ln 6$: $t = 5 \ln 6 \approx 8,96$ jours. (0,8)

Attention — « La concentration diminue de plus en plus lentement » se traduit par $c' < 0$ et $c'' > 0$: deux informations différentes, à justifier séparément.

Exercice 5 – Exercice 5 — Un minimum et une erreur à corriger

(4 pts)

- a) Énoncé de l'exercice. (0,8)
- b) Forme u^2 avec $u(x) = \ln x - 2$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$: $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times (\ln x - 2) = \frac{2(\ln x - 2)}{x}$. (0,8)
- c) Sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$: $f'(x)$ est du signe de $\ln x - 2$, négatif pour $x < e^2$, nul en e^2 , positif pour $x > e^2$. Donc f décroît sur $]0 ; e^2]$ puis croît sur $[e^2 ; +\infty[$. (0,8)
- d) Le minimum est $f(e^2) = (2 - 2)^2 = 0$, atteint en $x = e^2 \approx 7,389$. (0,8)
- e) L'élève a appliqué $(u^2)' = 2u$ au lieu de $2u'u$: il a oublié de multiplier par la dérivée de l'intérieur, ici $u'(x) = \frac{1}{x}$. (0,8)

Astuce — Un carré est toujours positif ou nul : quand u s'annule, u^2 atteint son minimum, égal à 0.