Convexité

Fiche méthode

(Maths complémentaires Terminale · Analyse · Fonctions)

La démarche pour une question de convexité

1. Je repère ce qui est donné : l'expression de f, la courbe de f, de f' ou de f'', un tableau.

2. Je calcule f'' et j'étudie son signe (ou je lis les variations de f', ou le signe de f'').

3. Je conclus par intervalles : convexe où $f'' \geqslant 0$, concave où $f'' \leqslant 0$; point d'inflexion là où f'' change de signe.

4. J'exploite : position par rapport à une tangente ou une corde, interprétation (coût marginal, vitesse).

Le réflexe — chaque conclusion cite sa raison : « car f'' ≥ 0 sur I », « car f'' s'annule en changeant de signe », « car f est convexe donc au-dessus de ses tangentes ».

Cas 1 · Utiliser une corde ou une tangente

Réflexe — convexe : au-dessous des cordes, au-dessus des tangentes ; concave : l'inverse.

Exemple. Questions types : « Justifier que pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \leqslant \ldots$ ». Exemple : montrer que $\ln x \geqslant \dfrac{x-1}{e-1}$ sur $[1\,;e]$.

ln est concave sur $]0\,;+\infty[$ (fonction de référence).

$A(1\,;0)$ et $B(e\,;1)$ sont sur la courbe ; (AB) : $y = \dfrac{x-1}{e-1}$.

Concave : entre A et B, la courbe est au-dessus de la corde. D'où $\ln x \geqslant \dfrac{x-1}{e-1}$ sur $[1\,;e]$.

Attention — la comparaison avec la corde ne vaut qu'entre les deux points.

Cas 2 · Étudier la convexité avec f''

Réflexe — dériver deux fois, factoriser f'', mettre à part les facteurs positifs, tableau de signes.

Exemple. Questions types : « Étudier la convexité de f ». Exemple : $f(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$.

$f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$.

$e^{-x} > 0$: $f''(x)$ a le signe de $x-2$. f est concave sur $]-\infty\,;2]$, convexe sur $[2\,;+\infty[$.

Attention — le signe de f'' ne donne pas les variations de f.

Cas 3 · Trouver les points d'inflexion

Réflexe — f''(x) = 0, changement de signe vérifié, ordonnée calculée avec f.

Exemple. Questions types : « Déterminer les coordonnées des points d'inflexion ». Exemple : $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 1$.

$f''(x) = 12x^2 - 12x - 24 = 12(x+1)(x-2)$: signes $+$, $-$, $+$.

f'' change de signe en -1 et en 2.

$f(-1) = 1 + 2 - 12 + 1 = -8$ et $f(2) = 16 - 16 - 48 + 1 = -47$: points $(-1\,;-8)$ et $(2\,;-47)$.

Attention — f''(a) = 0 sans changement de signe : pas d'inflexion (x^4 en 0).

Cas 4 · Situer une courbe par rapport à une tangente

Réflexe — d(x) = f(x) − y_T, factorisé par une puissance de (x − a), puis son signe.

Exemple. Questions types : « Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T ». Exemple : $f(x) = x^3 + x^2$ et $a = -1$.

$f(-1) = 0$, $f'(x) = 3x^2 + 2x$, $f'(-1) = 1$: $T : y = x + 1$.
$d(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)^2(x-1)$.
$d(x) \leqslant 0$ pour $x \leqslant 1$: courbe au-dessous de T sur $]-\infty\,;1[$ (contact en -1), au-dessus sur $]1\,;+\infty[$.

Attention — un facteur (x − a)² ne change pas de signe : pas de traversée en a.

Cas 5 · Lire sur la courbe de f′ ou de f″

Réflexe — f′ : son sens de variation donne la convexité, son signe les variations de f.

Exemple. Questions types : « D'après la courbe de f', étudier la convexité de f ». Exemple : f' décroît sur $[-3\,;0]$, croît sur $[0\,;4]$, et $f'(0) = -2$.

f' décroissante sur $[-3\,;0]$: f concave sur $[-3\,;0]$.
f' croissante sur $[0\,;4]$: f convexe sur $[0\,;4]$.
Point d'inflexion d'abscisse 0, tangente de coefficient directeur $f'(0) = -2$.

Attention — f′ au-dessus de l'axe veut dire f croissante, pas f convexe.

Cas 6 · Interpréter un coût ou une vitesse

Réflexe — coût marginal = C′ ; concave = rendements croissants ; inflexion = coût marginal minimal.

Exemple. Questions types : « Interpréter le point d'inflexion », « Coût marginal minimal ». Exemple : $C(q) = 2q^3 - 18q^2 + 60q + 10$.

$C'(q) = 6q^2 - 36q + 60$, $\Delta = 1\,296 - 1\,440 = -144 < 0$: C croissante.
$C''(q) = 12q - 36$: rendements croissants sur $[0\,;3]$, décroissants ensuite.
Coût marginal minimal : $C'(3) = 54 - 108 + 60 = 6$.

Attention — rendements décroissants : C′ augmente, mais C reste croissante.

Les pièges

- Convexe ne veut pas dire croissante : x ↦ e^(−x) est convexe et décroissante sur ℝ.
- f″(a) = 0 ne suffit pas pour une inflexion : il faut un changement de signe.
- Sur la courbe de f′, ne pas lire son signe à la place de son sens de variation.
- La tangente en un point d'inflexion n'est pas forcément horizontale.
- Conclure sur des intervalles de l'ensemble de définition (pas « convexe sur ℝ » pour 1/x).
- Le point d'inflexion a pour ordonnée f(a), pas f″(a) = 0.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).