

Devoir surveillé – Convexité

Convexité, concavité et points d'inflexion — étude via la dérivée seconde (programme Maths complémentaires Tle)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Exercice 1 — Étude de la convexité d'une fonction polynôme

(4 pts)

- a) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 4$. Calculer $f'(x)$.
- b) Calculer $f''(x)$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
- c) En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe, puis concave.
- d) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de la courbe de f .

Exercice 2 – Exercice 2 — Lecture graphique et interprétation

(4 pts)

- a) Une fonction g est deux fois dérivable sur $[-4; 6]$ et le signe de g'' est donné ci-dessous ; g'' ne s'annule qu'en -1 et en 3 .

Intervalle	$[-4; -1]$	$[-1; 3]$	$[3; 6]$
Signe de $g''(x)$	–	+	–

- a) Donner les intervalles sur lesquels la courbe de g est convexe, puis concave.
- b) Préciser le nombre de points d'inflexion et leurs abscisses.
- c) On sait de plus que $g(-1) = 2$ et $g'(-1) = -4$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse -1 , puis préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente de part et d'autre de ce point.
- d) Un élève écrit : « g'' est négative sur $[3; 6]$, donc g est décroissante sur $[3; 6]$. » Expliquer son erreur.

Exercice 3 – Exercice 3 — Fonction avec quotient et tangente

(4 pts)

- a) Soit g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2x + \frac{8}{x}$. Calculer $g'(x)$.
- b) Calculer $g''(x)$ et en déduire la convexité de g sur $]0; +\infty[$.
- c) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de g au point d'abscisse 2 .
- d) Montrer que, pour tout $x > 0$, $g(x) - 8 = \frac{2(x-2)^2}{x}$, puis en déduire la position de la courbe par rapport à T .

Exercice 4 – Exercice 4 — Coût de production d'un atelier*(4 pts)*

- a) Un atelier fabrique q meubles par jour, avec $0 \leq q \leq 30$. Le coût total, en centaines d'euros, est $C(q) = 0,05q^3 - 1,8q^2 + 35q + 80$.
- a) Calculer le coût marginal $C'(q)$ et montrer que C est croissante sur $[0; 30]$.
- b) Calculer $C''(q)$ et étudier son signe sur $[0; 30]$.
- c) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de la courbe de C .
- d) Interpréter ce point en termes de rendements, et calculer la valeur minimale du coût marginal.

Exercice 5 – Exercice 5 — Conditions, contre-exemple et paramètre*(4 pts)*

- a) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2$. Calculer $f''(x)$, le factoriser et étudier son signe.
- b) En déduire les intervalles de convexité de f et les coordonnées de ses points d'inflexion.
- c) L'affirmation « si f' est croissante sur un intervalle I , alors f est croissante sur I » est-elle vraie ? Justifier, en donnant un contre-exemple si nécessaire.
- d) Déterminer le réel m pour que la courbe de p , définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^3 + mx^2 + 4x$, admette un point d'inflexion d'abscisse 3.

Bon courage !