

Corrigé et barème – Convexité

Convexité, concavité et points d'inflexion — étude via la dérivée seconde (programme Maths complémentaires Tle)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Exercice 1 — Étude de la convexité d'une fonction polynôme

(4 pts)

- a) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$. (1)
- b) $f''(x) = 6x + 6$; fonction affine croissante, $f''(x) \geq 0 \iff x \geq -1$: négative sur $] -\infty ; -1]$, positive sur $[-1 ; +\infty[$. (1)
- c) f est concave sur $] -\infty ; -1]$ et convexe sur $[-1 ; +\infty[$. (1)
- d) f'' s'annule en -1 en changeant de signe ; $f(-1) = -1 + 3 + 24 + 4 = 30$, donc le point d'inflexion est $I(-1 ; 30)$. (1)

Le point clé — La convexité se lit entièrement sur le signe de f'' , sans jamais avoir besoin du signe de f' .

Exercice 2 – Exercice 2 — Lecture graphique et interprétation

(4 pts)

- a) Convexe sur $[-1 ; 3]$ (là où $g'' \geq 0$) ; concave sur $[-4 ; -1]$ et sur $[3 ; 6]$. (1)
- b) Deux points d'inflexion, d'abscisses -1 et 3 : g'' s'y annule en changeant de signe. (1)
- c) $y = -4(x + 1) + 2 = -4x - 2$. La courbe passe de concave à convexe en -1 : elle est au-dessous de la tangente sur $[-4 ; -1[$ et au-dessus sur $] -1 ; 3]$, donc elle traverse sa tangente. (1)
- d) Le signe de g'' renseigne sur la convexité, pas sur les variations. Sur $[3 ; 6]$, g est concave, donc g' y est décroissante ; mais g' peut rester positive et g croissante. Il faudrait connaître le signe de g' pour conclure. (1)

Erreur fréquente — Confondre le signe de g'' (courbure) avec le signe de g' (variations) coûte des points à chaque devoir.

Exercice 3 – Exercice 3 — Fonction avec quotient et tangente

(4 pts)

- a) $g'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$. (1)
- b) $g'(x) = 2 - 8x^{-2}$ donc $g''(x) = 16x^{-3} = \frac{16}{x^3}$, strictement positive pour $x > 0$: g est convexe sur $]0 ; +\infty[$. (1)
- c) $g(2) = 4 + 4 = 8$ et $g'(2) = 2 - 2 = 0$: la tangente est horizontale, $T : y = 8$. (1)
- d) $g(x) - 8 = \frac{2x^2 + 8 - 8x}{x} = \frac{2(x^2 - 4x + 4)}{x} = \frac{2(x-2)^2}{x}$. Numérateur positif ou nul, dénominateur strictement positif, donc $g(x) \geq 8$: la courbe est au-dessus de T , avec le seul point de contact $(2 ; 8)$. (1)

Repère — Pour situer une courbe par rapport à une tangente, on réduit au même dénominateur puis on factorise par $(x - a)$.

Exercice 4 – Exercice 4 — Coût de production d'un atelier*(4 pts)*

- a) $C'(q) = 0,15q^2 - 3,6q + 35$; $\Delta = 3,6^2 - 4 \times 0,15 \times 35 = 12,96 - 21 = -8,04 < 0$ et le coefficient dominant est positif, donc $C'(q) > 0$: C est croissante. (1)
- b) $C''(q) = 0,3q - 3,6$; $C''(q) \geq 0 \iff q \geq 12$: négative sur $[0; 12]$, positive sur $[12; 30]$. (1)
- c) C'' s'annule en 12 en changeant de signe ; $C(12) = 86,4 - 259,2 + 420 + 80 = 327,2$, donc le point d'inflexion est $I(12; 327,2)$. (1)
- d) Avant 12 meubles, C est concave : le coût marginal décroît, les rendements sont croissants. Après 12, C est convexe : rendements décroissants. Le coût marginal est minimal en $q = 12$ et vaut $C'(12) = 21,6 - 43,2 + 35 = 13,4$ centaines d'euros par meuble. (1)

À retenir — Le point d'inflexion d'une fonction de coût est précisément la quantité pour laquelle le coût marginal est minimal.

Exercice 5 – Exercice 5 — Conditions, contre-exemple et paramètre*(4 pts)*

- a) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$ puis $f''(x) = 12x^2 + 24x = 12x(x + 2)$: trinôme de coefficient dominant positif, de racines -2 et 0 , donc positif sur $] -\infty; -2]$ et $[0; +\infty[$, négatif sur $[-2; 0]$. (1)
- b) f est convexe sur $] -\infty; -2]$ et sur $[0; +\infty[$, concave sur $[-2; 0]$. Changement de signe en -2 et en 0 : $f(-2) = 16 - 32 - 2 = -18$ et $f(0) = -2$, d'où les points $(-2; -18)$ et $(0; -2)$. (1)
- c) L'affirmation est fausse : elle confond convexité et croissance. Contre-exemple : $h(x) = x^2 - 6x$ vérifie $h''(x) = 2 > 0$, donc h' est croissante, alors que h est décroissante sur $] -\infty; 3]$ puisque $h'(x) = 2x - 6 \leq 0$ pour $x \leq 3$. (1)
- d) $p''(x) = 6x + 2m$ s'annule en 3 si $18 + 2m = 0$, soit $m = -9$. p'' étant affine de coefficient $6 > 0$, elle change bien de signe en 3 : c'est donc un point d'inflexion. (1)

Attention — Une annulation de la dérivée seconde ne vaut inflexion que si le changement de signe est explicitement vérifié.