Calcul intégral

Fiche méthode

(Maths complémentaires Terminale · Analyse · Intégration)

La démarche face à une intégrale

1. Je regarde la fonction : est-elle continue sur l'intervalle ? Quel est son signe ? Est-elle monotone ?

2. Je choisis l'outil : une figure simple (aire de géométrie), une primitive ($F(b) - F(a)$), un encadrement (rectangles, $m \leqslant f \leqslant M$).

3. Je calcule en écrivant le crochet $\Big[F(x)\Big]_a^b$ et des parenthèses autour de $F(a)$.

4. Je conclus avec l'unité : u.a. ou cm² pour une aire, unité de la grandeur pour une valeur moyenne en situation.

Le réflexe — une intégrale n'est une aire que si la fonction est positive : le signe de la fonction s'étudie avant de conclure.

Cas 1 · Intégrale et aire d'une figure

Réflexe — fonction positive et domaine simple : rectangle, triangle, trapèze ou morceau de disque, avec la formule d'aire.

Exemple. Questions types : « Calculer $\int_a^b f(x)\,dx$ à l'aide d'une aire », « Donner cette aire en cm² ». Exemple : $\int_0^3 (x+1)\,dx$, avec 1 unité = 2 cm sur chaque axe.

Sur $[0\,;3]$, $x + 1 \geqslant 1 > 0$: l'intégrale est l'aire d'un trapèze de bases $f(0) = 1$ et $f(3) = 4$ et de hauteur 3.

$\int_0^3 (x+1)\,dx = \dfrac{1+4}{2} \times 3 = 7{,}5$ u.a.

1 u.a. $= 2 \times 2 = 4$ cm², donc l'aire vaut $7{,}5 \times 4 = 30$ cm².

Attention — la hauteur du trapèze est b − a ; on multiplie les deux échelles pour l'unité d'aire.

Cas 2 · Calculer avec une primitive

Réflexe — primitive F (vérifiée en dérivant), crochet [F(x)] de a à b, puis F(b) − F(a).

Exemple. Questions types : « Calculer l'intégrale », « Montrer que l'intégrale vaut… ». Exemple : $\int_1^3 (6x^2 - 2x)\,dx$.

Une primitive de $x \mapsto 6x^2 - 2x$ est $F(x) = 2x^3 - x^2$ (on vérifie : $F'(x) = 6x^2 - 2x$).

$\int_1^3 (6x^2 - 2x)\,dx = \Big[2x^3 - x^2\Big]_1^3 = (54 - 9) - (2 - 1) = 44.$

Attention — F(b) − F(a), pas f(b) − f(a) ; parenthèses autour de F(a).

Cas 3 · Signe quelconque et Chasles

Réflexe — signe de f ; si f change de signe, je découpe là où elle s'annule et j'additionne les valeurs absolues.

Exemple. Questions types : « Calculer l'intégrale, puis l'aire du domaine », « Expliquer pourquoi les deux résultats diffèrent ». Exemple : $f(x) = 2x - 2$ sur $[0\,;3]$.

f s'annule en 1 : négative sur $[0\,;1]$, positive sur $[1\,;3]$. Primitive : $F(x) = x^2 - 2x$.

$\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = -1$ et $\int_1^3 f(x)\,dx = F(3) - F(1) = 3 - (-1) = 4$.

Aire $= 1 + 4 = 5$ u.a., alors que $\int_0^3 f(x)\,dx = -1 + 4 = 3$.

Attention — une intégrale négative n'est pas une aire ; inverser les bornes change le signe.

Cas 4 · Valeur moyenne et encadrement

Réflexe — μ = intégrale divisée par b − a ; pour encadrer, m ≤ f ≤ M donne m(b − a) ≤ I ≤ M(b − a).

Exemple. Questions types : « Calculer la valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ », « Interpréter ». Exemple : $f(x) = 4x^3$ sur $[0\,;2]$.

$\int_0^2 4x^3\,dx = \left[x^4\right]_0^2 = 16$.
$\mu = \dfrac{1}{2-0} \times 16 = 8$: le rectangle de base $[0\,;2]$ et de hauteur 8 a la même aire que le domaine sous la courbe.
Contrôle : 8 est bien compris entre $f(0) = 0$ et $f(2) = 32$.

Attention — μ n'est pas (f(a) + f(b))/2 en général ; on divise par b − a, pas par 2.

Cas 5 · Aire entre deux courbes

Réflexe — bornes par f(x) = g(x), signe de f − g, intégrale « haut moins bas ».

Exemple. Questions types : « Déterminer les points d'intersection », « Étudier la position relative », « Calculer l'aire du domaine ». Exemple : $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x^2 - 4$.

$f(x) = g(x) \iff 2x^2 = 8 \iff x = -2$ ou $x = 2$.
$f(x) - g(x) = 8 - 2x^2 \geqslant 0$ sur $[-2\,;2]$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus.
Aire $= \int_{-2}^{2}(8 - 2x^2)\,dx = \left[8x - \dfrac{2x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \dfrac{32}{3} - \left(-\dfrac{32}{3}\right) = \dfrac{64}{3}$ u.a.

Attention — si les courbes se croisent dans l'intervalle, je découpe aux abscisses d'intersection.

Cas 6 · Méthode des rectangles

Réflexe — sens de variation d'abord ; h = (b − a)/n ; Rg et Rd rangés selon que f croît ou décroît.

Exemple. Questions types : « Encadrer l'intégrale avec n rectangles », « Trouver n pour une précision donnée ». Exemple : la fonction exponentielle sur $[0\,;1]$ avec $n = 2$.

exp est croissante ; $h = 0{,}5$; $e^0 = 1$, $e^{0{,}5} \approx 1{,}6487$, $e^1 \approx 2{,}7183$.
$R_g = 0{,}5 \times (1 + 1{,}6487) \approx 1{,}3244$ et $R_d = 0{,}5 \times (1{,}6487 + 2{,}7183) \approx 2{,}1835$.
Fonction croissante : $1{,}3244 \leqslant I \leqslant 2{,}1835$ (en fait, $I = e - 1 \approx 1{,}7183$).

Attention — Rg minore pour une fonction croissante, majore pour une fonction décroissante.

Les pièges

- Intégrale ≠ aire quand la fonction change de signe : on découpe aux zéros.
- ∫ de b à a = − ∫ de a à b : l'ordre des bornes compte.
- Ajouter une constante k à la fonction ajoute k(b − a) à l'intégrale, pas k.
- L'intégrale d'un produit n'est pas le produit des intégrales.
- Positivité et comparaison supposent a ≤ b.
- Une aire en cm² n'existe que si l'échelle des deux axes est donnée.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).