Calcul intégral

Fiche tableaux : les résultats à connaître
(Maths complémentaires Terminale)

Définitions

Situation	Résultat
f continue et positive sur $[a\,;b]$	$\int_a^b f(x)\,dx =$ aire sous la courbe (u.a.)
F primitive de f	$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$
f continue sur $[a\,;b]$	$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$: primitive de f qui s'annule en a
1 unité $= u$ cm (abscisses) et v cm (ordonnées)	1 u.a. $= u \times v$ cm²

Exemple : $G(x)=\int_0^x 2t\,dt = x^2$ vérifie $G(0)=0$ et $G'(x)=2x$.

Propriétés

Propriété	Formule
Bornes égales	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$
Bornes inversées	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
Chasles	$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$
Linéarité	$\int_a^b (\alpha f+\beta g) = \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g$
Positivité ($a \leqslant b$)	$f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0$
Comparaison ($a \leqslant b$)	$f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$
Encadrement ($a<b$)	$m \leqslant f \leqslant M \Rightarrow m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a)$

Exemple : si $\int_0^4 f = 3$ et $\int_4^6 f = 5$, alors $\int_0^6 f = 8$ et $\int_6^4 f = -5$.

Primitives pour calculer

$f(x)$	k	x^n $(n\neq -1)$	$\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$	e^{ax+b}	$u'e^u$	$\dfrac{u'}{u}$ $(u>0)$	$2u'u$
$F(x)$	kx	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln x$	$\dfrac{1}{a}e^{ax+b}$	e^u	$\ln u$	u^2

Exemple : $\int_0^1 e^{4x}\,dx = \Big[\frac{1}{4}e^{4x}\Big]_0^1 = \dfrac{e^4-1}{4}$.

Aires

Situation sur $[a\,;b]$	Aire du domaine (u.a.)
$f \geqslant 0$	$\int_a^b f(x)\,dx$
$f \leqslant 0$	$-\int_a^b f(x)\,dx$
f change de signe en c	$\left\lvert\int_a^c f(x)\,dx\right\rvert + \left\lvert\int_c^b f(x)\,dx\right\rvert$
$f \geqslant g$	$\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx$

Exemple : sur $[-1\,;0]$, $f(x)=3x$ est négative et $\int_{-1}^0 3x\,dx = -1{,}5$: l'aire vaut 1,5 u.a.

Valeur moyenne et rectangles

Notion	Formule
Valeur moyenne	$\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, avec $\min f \leqslant \mu \leqslant \max f$
Largeur des rectangles	$h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$
Rectangles à gauche / à droite	$R_g = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$; $R_d = h\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$
f croissante	$R_g \leqslant \int_a^b f \leqslant R_d$
f décroissante	$R_d \leqslant \int_a^b f \leqslant R_g$
Amplitude (f monotone)	$\dfrac{(b-a)\,\lvert f(b)-f(a)\rvert}{n}$

Exemple : la valeur moyenne de $x \mapsto 2x$ sur $[0\,;5]$ vaut $\dfrac{25}{5} = 5$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).