

Devoir surveillé – Calcul intégral

Intégrale d'une fonction continue, calcul d'aires et théorème fondamental de l'analyse (programme Maths complémentaires Terminale)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Calculs d'intégrales et unité d'aire

(4 pts)

- a) a) Calculer $\int_0^3 (2x + 5) dx$.
 b) b) Calculer $\int_{-2}^0 (x + 1) dx$.
 c) c) Calculer $\int_1^2 6x^2 dx$.
 d) d) Une unité vaut 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée. Donner en cm^2 l'aire du domaine situé sous la courbe de $x \mapsto 6x^2$ entre 1 et 2.

Exercice 2 – Chasles et linéarité

(4 pts)

On donne $\int_{-1}^2 f = 7$, $\int_2^5 f = -1$ et $\int_{-1}^5 g = 4$, où f et g sont continues sur $[-1; 5]$.

- a) a) Calculer $\int_{-1}^5 f(x) dx$.
 b) b) Calculer $\int_5^2 f(x) dx$.
 c) c) Calculer $\int_{-1}^5 (3f(x) - 2g(x)) dx$.
 d) d) Calculer $\int_{-1}^5 (f(x) + 2) dx$.

Exercice 3 – Valeur moyenne d'une fonction

(4 pts)

On considère la fonction f définie sur $[0; 3]$ par $f(x) = 9 - x^2$.

- a) a) Montrer que $\int_0^3 f(x) dx = 18$.
 b) b) En déduire la valeur moyenne μ de f sur $[0; 3]$.
 c) c) Résoudre dans $[0; 3]$ l'équation $f(x) = \mu$; donner la valeur exacte puis une valeur arrondie au centième.
 d) d) Interpréter graphiquement le nombre μ .

Exercice 4 – Méthode des rectangles et algorithme

(4 pts)

On pose $J = \int_0^2 (x^3 + 1) dx$ et $f(x) = x^3 + 1$.

- a) a) Justifier que f est croissante sur $[0; 2]$.
 b) b) Calculer les sommes de rectangles à gauche et à droite pour $n = 4$, puis en déduire un encadrement de J .
 c) c) Calculer la valeur exacte de J et vérifier la cohérence avec la question b).
 d) d) Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'amplitude de l'encadrement est inférieure ou égale à 0,05.

Exercice 5 – Puissance d’une éolienne*(4 pts)*

La puissance fournie par une éolienne, en kilowatts, est modélisée pour $t \in [0 ; 6]$ (en heures) par $P(t) = 400 + 150t - 25t^2$. L’énergie produite entre a et b , en kilowattheures, vaut $\int_a^b P(t) dt$.

- a) a) Montrer que l’énergie produite entre $t = 0$ et $t = 6$ vaut 3 300 kWh.
- b) b) En déduire la puissance moyenne sur ces six heures.
- c) c) Déterminer les instants où la puissance instantanée est égale à cette puissance moyenne (valeurs exactes, puis arrondies au centième).
- d) d) Un technicien affirme que la puissance moyenne vaut $\frac{P(0)+P(6)}{2}$. Calculer ce nombre et expliquer l’erreur.

Bon courage !