

Corrigé et barème – Calcul intégral

Intégrale d'une fonction continue, calcul d'aires et théorème fondamental de l'analyse (programme Maths complémentaires Terminale)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Calculs d'intégrales et unité d'aire

(4 pts)

- a) $[x^2 + 5x]_0^3 = (9 + 15) - 0 = 24$. (1)
- b) $\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-2}^0 = 0 - (2 - 2) = 0$ (les aires au-dessus et au-dessous de l'axe se compensent). (1)
- c) $[2x^3]_1^2 = 16 - 2 = 14$. (1)
- d) La fonction est positive sur $[1; 2]$, l'aire vaut 14 u.a. ; or 1 u.a. = $1 \times 2 = 2 \text{ cm}^2$, donc l'aire vaut 28 cm^2 . (1)

Erreur fréquente — Une intégrale nulle ne signifie pas que la fonction est nulle : elle indique que les aires situées de part et d'autre de l'axe se compensent.

Exercice 2 – Chasles et linéarité

(4 pts)

- a) Par Chasles : $7 + (-1) = 6$. (1)
- b) En inversant les bornes : $-(-1) = 1$. (1)
- c) Par linéarité : $3 \times 6 - 2 \times 4 = 18 - 8 = 10$. (1)
- d) $\int_{-1}^5 2 dx = 2 \times (5 - (-1)) = 12$, donc le résultat vaut $6 + 12 = 18$. (1)

Le point clé — Chasles découpe l'intervalle, la linéarité découpe la fonction : ajouter la constante 2 ajoute $2(b - a)$ à l'intégrale, pas 2.

Exercice 3 – Valeur moyenne d'une fonction

(4 pts)

- a) f est un polynôme donc continue ; une primitive est $F(x) = 9x - \frac{x^3}{3}$, d'où $\int_0^3 f = (27 - 9) - 0 = 18$. (1)
- b) $\mu = \frac{1}{3-0} \times 18 = 6$. (1)
- c) $9 - x^2 = 6 \iff x^2 = 3 \iff x = \sqrt{3}$ (la solution $-\sqrt{3}$ est hors de $[0; 3]$), soit $x \approx 1,73$. (1)
- d) $\mu = 6$ est la hauteur du rectangle de base $[0; 3]$ et d'aire 18 u.a., c'est-à-dire de même aire que le domaine situé sous la courbe de f . (1)

À retenir — La valeur moyenne se lit comme une hauteur de rectangle équivalent : ici 6, et non $\frac{f(0)+f(3)}{2} = 4,5$.

Exercice 4 – Méthode des rectangles et algorithme

(4 pts)

- a) $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ sur $[0; 2]$, donc f est croissante sur cet intervalle. (1)
- b) $h = 0,5$; $f(0) = 1$, $f(0,5) = 1,125$, $f(1) = 2$, $f(1,5) = 4,375$, $f(2) = 9$. D'où $R_g = 0,5 \times 8,5 = 4,25$ et $R_d = 0,5 \times 16,5 = 8,25$; f étant croissante, $4,25 \leq J \leq 8,25$. (1)
- c) $J = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_0^2 = 4 + 2 = 6$, et $4,25 \leq 6 \leq 8,25$: l'encadrement est cohérent. (1)
- d) L'amplitude vaut $\frac{2 \times |9-1|}{n} = \frac{16}{n}$; $\frac{16}{n} \leq 0,05 \iff n \geq 320$, donc $n = 320$. (1)

Attention — Le sens de l'encadrement dépend du sens de variation : justifier la monotonie avant de conclure fait partie de la réponse.

Exercice 5 – Puissance d’une éolienne*(4 pts)*

- a) P est un polynôme donc continue ; une primitive est $\mathcal{P}(t) = 400t + 75t^2 - \frac{25}{3}t^3$, d’où $\int_0^6 P = 2\,400 + 2\,700 - \frac{25}{3} \times 216 = 2\,400 + 2\,700 - 1\,800 = 3\,300$ kWh. (1)
- b) $\bar{P} = \frac{1}{6-0} \times 3\,300 = 550$ kW. (1)
- c) $400 + 150t - 25t^2 = 550 \iff 25t^2 - 150t + 150 = 0 \iff t^2 - 6t + 6 = 0$; $\Delta = 12$, donc $t = 3 - \sqrt{3} \approx 1,27$ h et $t = 3 + \sqrt{3} \approx 4,73$ h, toutes deux dans $[0; 6]$. (1)
- d) $P(0) = 400$ et $P(6) = 400 + 900 - 900 = 400$, donc ce nombre vaut 400 kW, soit 150 kW de moins que la vraie moyenne. L’erreur : P n’est pas affine, c’est un trinôme qui culmine à $P(3) = 625$ kW ; les valeurs aux extrémités ignorent toute la production du milieu de la période. (1)

Repère — Deux valeurs aux bornes ne résument jamais une fonction : seule l’intégrale tient compte de tout l’intervalle.