

Devoir surveillé – Arithmétique

Divisibilité, division euclidienne, PGCD, nombres premiers et congruences — chapitre d'approfondissement, hors programme de l'option en Terminale

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Divisibilité et division euclidienne

(4 pts)

- a) a) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 3 458 par 47.
- b) b) Un entier naturel a pour quotient 31 et pour reste 19 dans la division euclidienne par 26. Déterminer cet entier.
- c) c) Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n - 2$ divise $4n + 5$.
- d) d) Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Exercice 2 – PGCD et fractions

(4 pts)

- a) a) Calculer PGCD(2 431 ; 1 683) en détaillant l'algorithme d'Euclide.
- b) b) En déduire l'écriture irréductible de la fraction $\frac{1683}{2431}$.
- c) c) Justifier que les deux entiers obtenus au b) sont premiers entre eux.
- d) d) Soit n un entier naturel. Déterminer, selon les valeurs de n , le PGCD de $n + 5$ et de $n + 8$.

Exercice 3 – Nombres premiers et décomposition

(4 pts)

- a) a) L'entier 1 271 est-il premier ? Justifier.
- b) b) Décomposer 6 084 en produit de facteurs premiers, puis donner son nombre de diviseurs positifs.
- c) c) En déduire que 6 084 est un carré parfait et préciser sa racine carrée.
- d) d) Démontrer que 1 271 et 6 084 sont premiers entre eux.

Exercice 4 – Congruences

(4 pts)

- a) a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 8^{17} par 9.
- b) b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , l'entier $7^n - 1$ est divisible par 6.
- c) c) Déterminer le chiffre des unités de 3^{101} .
- d) d) Déterminer tous les entiers naturels n tels que $4n \equiv 3 \pmod{7}$.

Exercice 5 – Algorithmique en Python*(4 pts)*

a) On considère la fonction suivante.

```
def reste_puissance(a, n, m):  
    r = 1  
    for i in range(n):  
        r = (r * a) % m  
    return r
```

- a) Donner la valeur renvoyée par *reste_puissance*(6, 5, 13).
- b) Expliquer pourquoi on réduit modulo *m* à chaque tour de boucle plutôt qu'une seule fois à la fin.
- c) Écrire une fonction *divise(a, b)* qui renvoie True lorsque *a* divise *b*, et False sinon.
- d) Un élève teste *divise*(0, 12) et obtient un message d'erreur. Expliquer l'origine de cette erreur et proposer une correction.

Bon courage !